ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΙΜΑΙΟ ΩΣ ΤΟΝ FELIX KLEIN ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ERLANGEN

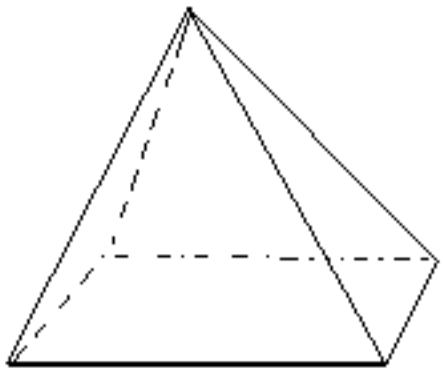
---

4. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Στις τρεις διαστάσεις, η συμμετρία έχει την πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή της στα πολύεδρα και δη τα κανονικά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα πραγματευθούμε τα κανονικά πολύεδρα, την ιστορική τους διαδρομή και θα ασχοληθούμε με τις συμμετρίες κάποιων από αυτά. Τέλος, θα γίνει μια προσπάθεια να σκιαγραφηθεί η εμφάνισή τους στην τέχνη, την αρχιτεκτονική και τη φύση.

Πολύεδρο, στη γεωμετρία, είναι ένα στερεό που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες με κάθε επιφάνεια να ορίζεται από ευθύγραμμα τμήματα. Με άλλα λόγια πολύεδρο είναι ένα στερεό που περιβάλλεται από πολύγωνα. Κάθε μία από τις επίπεδες επιφάνειες λέγεται έδρα και κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα των πολυγώνων λέγεται ακμή. Το σημείο τομής δύο ακμών λέγεται κορυφή. Στο σχήμα 1 βλέπουμε ένα παράδειγμα πολύεδρου: μια πυραμίδα με μια τετράγωνη έδρα-βάση και τρεις τριγωνικές πλευρικές έδρες.



Σχήμα 1
Πυραμίδα

Ένα κυρτό πολύεδρο είναι το πολύεδρο στο οποίο μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών περνά μόνο από σημεία που είτε βρίσκονται σε έδρα του πολύεδρου είτε στο εσωτερικό του.

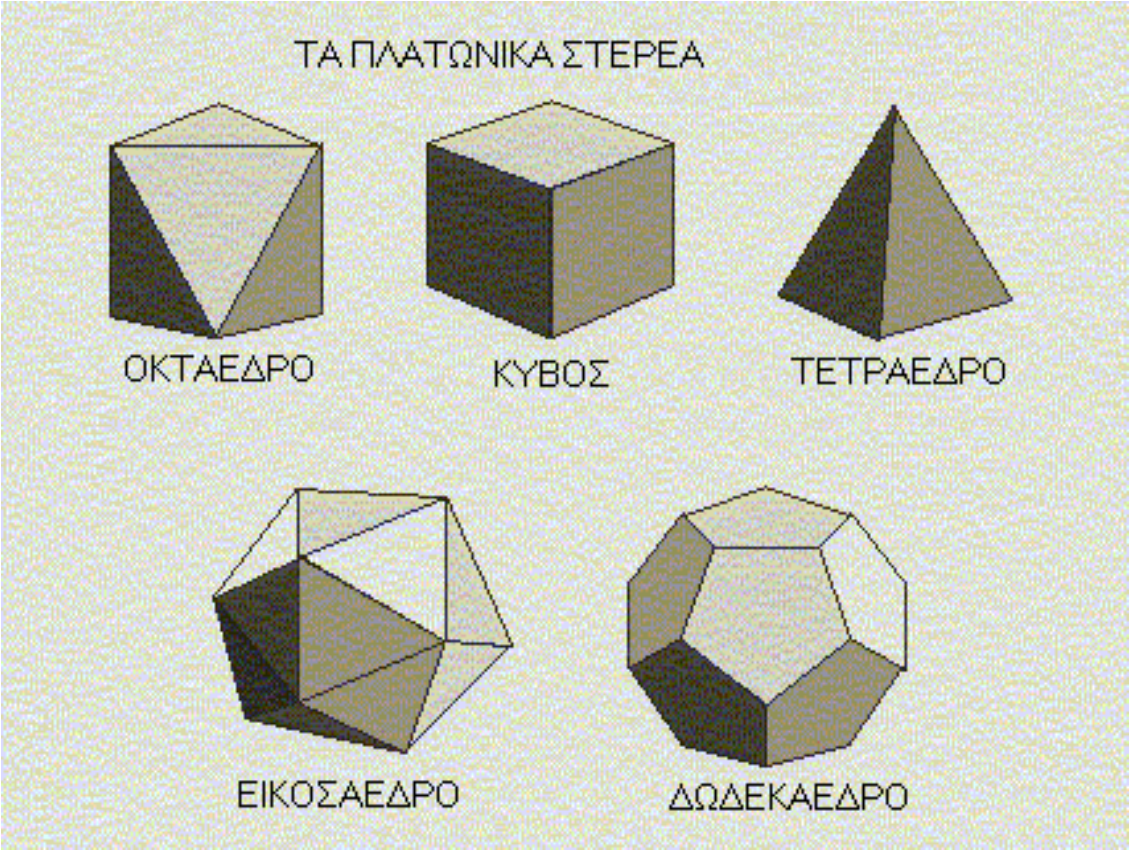
Ένα *κυρτό πολύεδρο* θα λέγεται *κανονικό* όταν όλες οι έδρες του *είναι κανονικά πολύγωνα*, ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή ένα κανονικό πολύεδρο ένα στερεό που έχει ίσες τις έδρες του, ίσες ακμές, ίσες στερεές γωνίες και επιπλέον εγγράφεται σε σφαίρα. Σε αντίθεση με τα κανονικά πολύγωνα, που είναι άπειρα σε αριθμό αφού για κάθε ακέραιο ν μπορούμε να κατασκευάσουμε αντίστοιχο κανονικό ν-γωνο, τα κανονικά πολύεδρα είναι πεπερασμένου πλήθους. Τα μόνα κανονικά πολύεδρα είναι πέντε, των οποίων τα ονόματα και οι λεπτομέρειες τους αναγράφονται στον πίνακα 1. Παρατηρούμε ότι ο κύβος έχει έδρες τετράγωνα και το δωδεκάεδρο πεντάγωνα ενώ τα υπόλοιπα τρία έχουν έδρες ισόπλευρα τρίγωνα.

ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ			
	Κορυφές	Ακμές / ανά κορυφή	Έδρες / ανά κορυφή
Τετράεδρο	4	6 (3 ανά κορυφή)	4 ίσα τρίγωνα (3 ανά κορυφή)
Οκτάεδρο	6	12 (4 ανά κορυφή)	8 ίσα τρίγωνα (4 ανά κορυφή)
Κύβος	8	12 (3 ανά κορυφή)	6 τετράγωνα (3 ανά κορυφή)
Εικοσάεδρο	12	30 (5 ανά κορυφή)	20 ίσα τρίγωνα (5 ανά κορυφή)
Δωδεκάεδρο	20	30 (3 ανά κορυφή)	12 πεντάγωνα (3 ανά κορυφή)

Πίνακας 1

Για κανονικά πολύεδρα, η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις κορυφές **κ**, τις ακμές **α** και τις έδρες **ε** είναι $\kappa + \varepsilon = \alpha + 2$. Για παράδειγμα, ο κύβος έχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές που μας δίνει $8 + 6 - 12 = 2$. Η σχέση αυτή λέγεται χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας ενός πολύεδρου.

Στο παρακάτω σχήμα [B-E] φαίνονται και τα πέντε κανονικά πολύεδρα:



Μερικές φορές για λόγους συστηματοποίησης ένα πολύεδρο αναφέρεται με ένα ζεύγος αριθμών (j, n) όπου j είναι j οι ακμές που συμπίπτουν σε κάθε κορυφή και n το πλήθος των ακμών κάθε έδρας, δηλαδή ο αριθμός 3 για τρίγωνα, 4 για τετράγωνα και 5 για πεντάγωνα.

Παρακάτω παραθέτουμε μια απόδειξη του γεγονότος ότι υπάρχουν μόνο 5 κανονικά πολύεδρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό της κανονικότητας είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι όλες οι έδρες ενός πλατωνικού στερεού πρέπει να αποτελούν ίσα κανονικά $n - \gamma\omega\nu\alpha$ για ένα κατάλληλο n, και ότι όλες οι κορυφές πρέπει να ανήκουν σε ίδιο

πλήθος **j** από $n-\gamma\omega\nu\alpha$. Επειδή το άθροισμα των επίπεδων γωνιών σε μια κορυφή κυρτού πολύεδρου είναι μικρότερο από $2\cdot\pi$ και επειδή κάθε γωνία κανονικού $n-\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon$ είναι $\frac{(n-2)\pi}{n}$, έπεται ότι $j\cdot\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}<2\cdot\pi\Leftrightarrow(j-2)\cdot(n-2)<4$. Τουτέστιν, οι μόνες δυνατότητες του ζεύγους (j, n) είναι οι εξής: (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3) και (5, 3). Μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι κάθε ένα από αυτά τα ζεύγη αντιστοιχίζεται σε ένα πλατωνικό στερεό, συγκεκριμένα στο τετράεδρο, στον κύβο, στο δωδεκάεδρο, στο οκτάεδρο και στο εικοσάεδρο. Παρόμοια επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό των Αρχιμήδειων Στερεών καθώς και αλλού.

Σχετικά με την ιστορική προέλευση, ο Weyl [B1-σελ 98] διαπιστώνει ότι η ύπαρξη των τριών πρώτων πολύεδρων είναι περίπου προφανής γεωμετρικά. Για το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο γράφει: «Αλλά η ανακάλυψη των δύο τελευταίων είναι βέβαια μία από τις ωραιότερες και μοναδικές που έγιναν σε ολόκληρη την ιστορία των μαθηματικών. Με αρκετή βεβαιότητα μπορεί να αποδοθεί στους Έλληνες αποίκους της κάτω Ιταλίας.» Συγκεκριμένα, η κατασκευή και η εγγραφή σε σφαίρα του οκτάεδρου και του εικοσάεδρου αποδίδεται από τον ανώνυμο σχολιαστή των Στοιχείων του Ευκλείδη στον Θεαίτητο (415-369 π.Χ.) Αθηναίο μαθηματικό, μαθητή του πυθαγόρειου Θεόδωρου του Κυρηναίου, που υπήρξε φίλος του Πλάτωνα. [B-1] Ο Weyl πιστώνει στον Θεαίτητο και την πρώτη ακριβή κατασκευή δωδεκάεδρου.

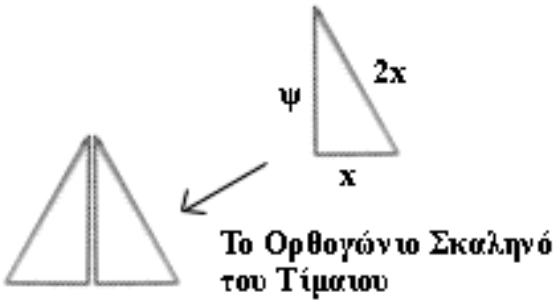
ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΣΤΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ - ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ

Όπως έχουμε ξαναπεί, τα κανονικά πολύεδρα συχνά λέγονται και Πλατωνικά Σώματα, επειδή ο Πλάτωνας είναι ο πρώτος, απ' όσο γνωρίζουμε, που δίνει ένα συστηματικό τρόπο κατασκευής τους και μάλιστα τα χρησιμοποιεί σαν μέρος της κοσμολογίας του. Συγκεκριμένα, στον διάλογο «Τίμαιος», που κατά πάσα πιθανότητα ανήκει στα ύστερα έργα του μαζί με το διάλογο «Κριτίας», ο Πλάτωνας, μέσω του κεντρικού «ομιλητή» Τίμαιου, πραγματεύεται συστηματικά τον φυσικό κόσμο και ιδιαίτερα την δημιουργία του. Ο Τίμαιος, ανάμεσα στα άλλα θέματα που θίγει στον μακροσκελή μονόλογό του, επιχειρεί να μαθηματικοποιήσει τη φύση. Περιγράφει τα έργα του Δημιουργού και τα γενικά χαρακτηριστικά του κόσμου που Αυτός δημιούργησε, με βάση ένα ιδεατό υπόδειγμα, βάζοντας τάξη στο προϋπάρχον χαοτικό υλικό. Εκεί διηγείται πως «το σώμα του κόσμου δημιουργήθηκε από τέσσερα στοιχεία που συνδέονται με δεσμούς γεωμετρικής αναλογίας» [B-6].

Η ιδέα, ότι όλα τα υλικά πράγματα συντίθενται από αυτά τα τέσσερα πρωταρχικά στοιχεία, αποδίδεται στον προγενέστερό Εμπεδοκλή, Έλληνα φιλόσοφο, ποιητή και πολιτικό [493-433 π.Χ.] που γεννήθηκε στον Ακράγαντα της Σικελίας και ήταν μαθητής του *Πυθαγόρα* και του Παρμενίδη. Ο Εμπεδοκλής θεωρούσε πως τίποτε δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται αλλά εν μέρει μετασχηματίζεται, με βάση την αναλογία των βασικών συστατικών μεταξύ τους τα οποία ήταν η φωτιά, ο αέρας, το νερό και η γη [Β-Β] αλλά ο Πλάτων επιχειρεί να αιτιολογήσει με μαθηματικό συλλογισμό την ύπαρξη, τον αριθμό και την αμοιβαία σύνδεσή τους. Γράφει πως ότι είναι σώμα, δηλαδή ότι έχει όγκο, οφείλει να αποτελείται από φωτιά, για να είναι ορατό, και γη για να είναι στερεό. Δύο πράγματα είναι ωστόσο αδύνατον να συνδεθούν χωρίς την παρουσία ενός τρίτου, που θα λειτουργήσει ως συνδετικός κρίκος [Β-6, 32 β]. Και ο πιο ωραίος δεσμός, σύμφωνα με τον Τίμαιο, είναι η γεωμετρική αναλογία. «Ας πάρουμε τρεις αριθμούς ή τρεις όγκους ή τρεις δυνάμεις [α,μ,β] τέτοιους ώστε ο ένας να είναι μέσος των άλλων, δηλαδή $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\mu}{\beta}$, οπότε και αντιστρόφως θα ισχύει ότι $\frac{\beta}{\mu} = \frac{\mu}{\alpha}$. Τότε εάν εναλλάξουμε θέσεις στα άκρα α, β και στον μέσο μ, θα εξακολουθήσουν κατ' ανάγκη να ισχύουν οι ίδιες σχέσεις, κάτι που σημαίνει ότι συναποτελούν όλοι μια ενότητα. [Β-6, σελ 205] Οι γεωμετρικοί μέσοι είναι πιθανότατα πυθαγόρειας προέλευσης [Β-6] και ο Πλάτων τους χρησιμοποιεί για να εξηγήσει την παρουσία δύο ακόμη στοιχείων που χρησιμεύουν για να συνδέουν, ωσάν γεωμετρικοί μέσοι τη γη και τη φωτιά. Αυτά είναι το νερό και ο αέρας. Έτσι, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, ο Θεός έφτιαξε το σώμα του κόσμου, οτιδήποτε είναι ορατό και απτό, με την εξής αναλογία των τεσσάρων στοιχείων $\frac{\text{φωτιά}}{\text{αέρας}} = \frac{\text{αέρας}}{\text{νερό}} = \frac{\text{νερό}}{\text{γη}}$ [Β-6]

Συνεχίζοντας, ο Τίμαιος δίνει στο σώμα του κόσμου το σχήμα της σφαίρας, γιατί στο έμβιο ον που θα περιλάβει όλα τα άλλα ταίριαζε εκείνο το σχήμα που περικλείει όλα τα υπόλοιπα σχήματα. Επιπλέον εκθειάζει τη συμμετρία της σφαίρας αποκαλώντας την «πάντων τελεώτατον ομοιότατον τε αυτό εαυτώ σχημάτων», δηλαδή το πιο πλήρες, σε αντιστοιχία με την πληρότητα του σύμπαντος, και πιο ομοιόμορφο σχήμα και επιπλέον δηλώνει ότι χίλιες φορές πιο ωραίο είναι το ομοιόμορφο από το ανομοιόμορφο («μυρίω κάλλιον όμοιον ανομοίον») [Β-6, 33b] Τα σχήματα που περικλείονται στη σφαίρα είναι ακριβώς τα κανονικά πολύεδρα, τα πλατωνικά στερεά. Μια άλλη εξήγηση της απόδοσης της σφαίρας στο σώμα του κόσμου είναι, σύμφωνα με τον Πρόκλο, ότι η σφαίρα έχει τον μεγαλύτερο όγκο από όλα τα στερεά με το ίδιο εμβαδόν [Β-6, σελ 366]

Τα τέσσερα στοιχεία τώρα, από τα οποία δημιουργείται το κάθε τι, είναι στερεά σώματα, οπότε, γράφει ο Πλάτων, θα περικλείονται από επίπεδες επιφάνειες που με τη σειρά τους θα δημιουργούνται από τρίγωνα. [Β-6, 53c] Όλα τα τρίγωνα συντίθεται από δύο είδη στοιχειωδών τριγώνων: το ορθογώνιο ισοσκελές και το ορθογώνιο σκαληνό. Από όλα τα ορθογώνια σκαληνά προκρίνει αυτό που έχει την υποτείνουσα διπλάσια από την μικρότερη κάθετη, δηλαδή το μισό ισόπλευρο τρίγωνο, όπως στο σχήμα.

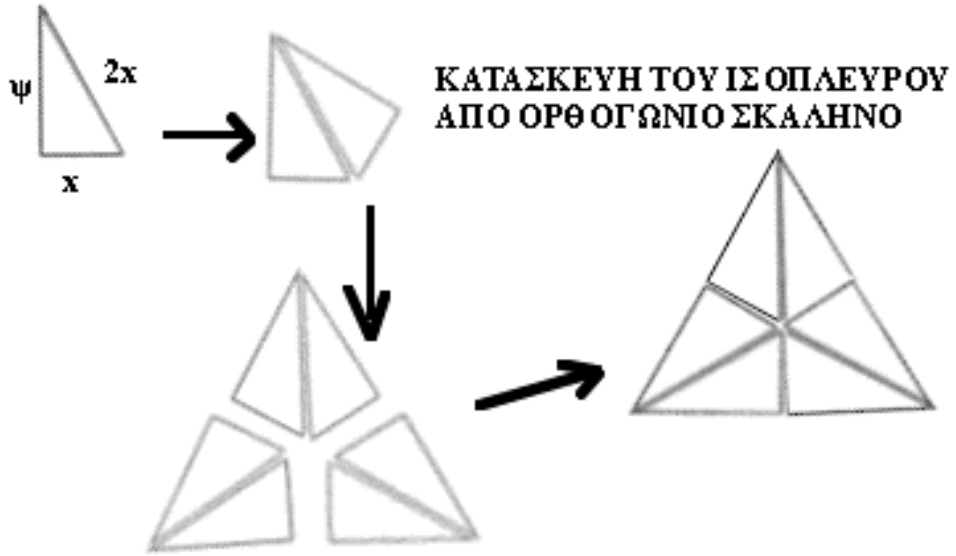


Έτσι, ο Πλάτων θεωρεί ότι σε τελευταία ανάλυση τα πάντα συντίθενται από δύο είδη ορθογωνίων τριγώνων, το ισοσκελές και το μισό ισόπλευρο. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγει αυτά είναι πιθανότατα η *συμμετρική διαιρετότητά* τους, ότι δηλαδή μπορούν να υποδιαιρεθούν δίχως όριο σε μικρότερα τρίγωνα τα οποία πάντα διατηρούν την ίδια αναλογία πλευρών [Β-6, σελ 450]. Με αυτόν το τρόπο ίσως να επεδίωκε να κρατήσει σταθερή την αναλογία, οπότε τα «ατομικά» τρίγωνα είναι θεμελιώδη για την εξήγηση όχι της σύστασης των αισθητών σωμάτων αλλά της διάταξης τους. Γι' αυτό και πουθενά ο Τίμαιος δεν αναφέρεται σε μεγέθη.

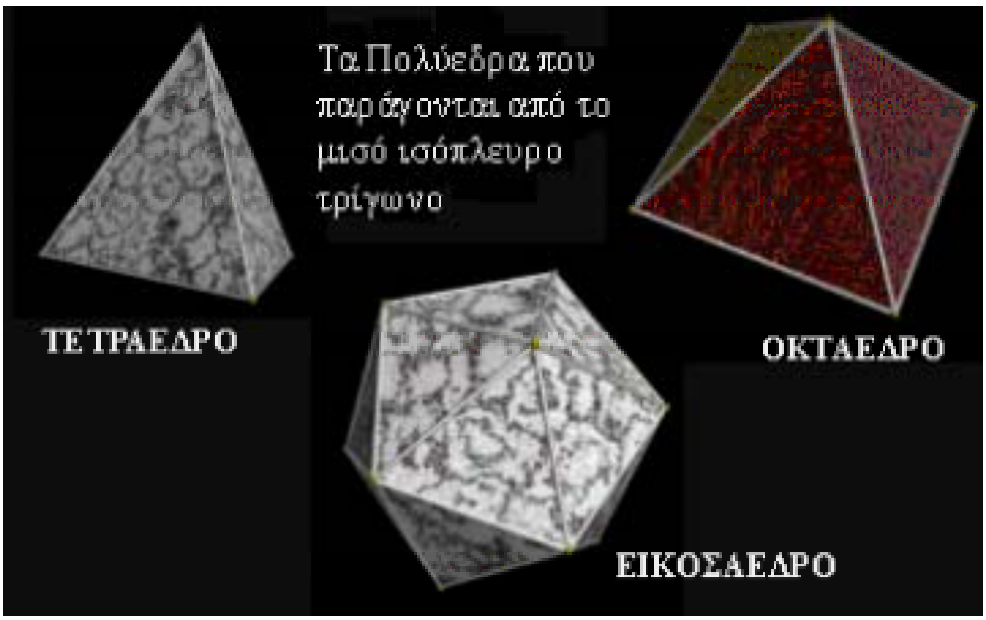
Κατόπιν, δίνει τον γεωμετρικό τρόπο κατασκευής, από αυτά τα στοιχειώδη τρίγωνα, των τεσσάρων κανονικών πολύεδρων: του τετράεδρου, του οκτάεδρου του εικοσάεδρου και του κύβου. Τα τρία πρώτα κατασκευάζονται από το ορθογώνιο σκαληνό του σχήματος, ενώ ο κύβος από το ορθογώνιο ισοσκελές. Για το πέμπτο κανονικό στερεό, το δωδεκάεδρο, μας δίνει ελάχιστες πληροφορίες λέγοντας ότι αυτήν την κατασκευή ο Θεός την προέβαλε στο σύμπαν και το διακόσμησε περιχαράσσοντας το με αυτή «έτι δε ούσης συστάσεως μιας πέμπτης, επί το πάν ο θεός αυτή κατεχρήσατο εκείνο διαζωγραφών» [Β6-55c].

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΑΤΩΝΑ

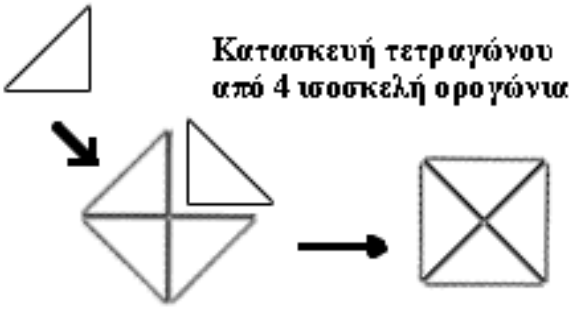
Για παράδειγμα, η γεωμετρική κατασκευή του κανονικού τετράεδρου έχει ως εξής: δύο σκαληνά ορθογώνια τρίγωνα συνενώνονται στις υποτείνουσές τους σχηματίζοντας τραπέζιο και αυτό επαναλαμβάνεται τρεις φορές. Τρία τέτοια τραπέζια συνθέτονται έτσι ώστε οι υποτείνουσες και οι μικρότερες πλευρές [των τριγώνων] να ενωθούν στο ίδιο κεντρικό σημείο. Οπότε δημιουργείται το ισόπλευρο τρίγωνο του σχήματος, που αποτελείται από έξι στοιχειώδη ορθογώνια σκαληνά. [B6-54e] Είναι βέβαια άξιο απορίας γιατί χρησιμοποιεί έξι τέτοια τρίγωνα για να κατασκευάσει το ισόπλευρο αφού το τελευταίο μπορεί να σχηματιστεί μόνο από δύο.



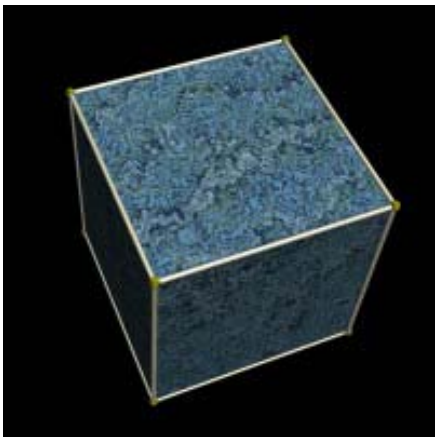
Με βάση αυτό το ισόπλευρο τρίγωνο ο Τίμαιος κατασκευάζει το τετράεδρο όπως και άλλα δύο πολύεδρα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο. «Στη συνέχεια, παίρνουμε τέσσερα τέτοια ισόπλευρα τρίγωνα και τα συνθέτουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι επίπεδες γωνίες τους να σχηματίζουν ανά τρεις μια στερεά γωνία, το μέγεθος της οποίας προσεγγίζει οριακά την αμβλύτερη επίπεδη γωνία. Όταν δημιουργηθούν τέσσερις τέτοιες γωνίες έχουμε κατασκευάσει το πρώτο είδος στερεού, που διαιρεί την περιγεγραμμένη σφαίρα σε τέσσερα ίσα και όμοια μέρη» [B-6, 55]. Αυτό είναι το κανονικό τετράεδρο. Με ανάλογους συλλογισμούς και χρησιμοποιώντας το ίδιο ισόπλευρο τρίγωνο περισσότερες φορές και σε περισσότερες γωνίες, ο Τίμαιος κατασκευάζει το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο.



Αντίθετα για το εξάεδρο, δηλαδή τον κύβο, και μόνον γι' αυτόν χρησιμοποιεί το ορθογώνιο ισοσκελές τέσσερις φορές για να κατασκευάσει ένα τετράγωνο όπως στο σχήμα. «Τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα συνενώθηκαν φέρνοντας τις ορθές τους γωνίες στο κέντρο και σχημάτισαν ένα ισόπλευρο τετράγωνο». [B-6, 55b]



Συνδυάζοντας σε ορθές γωνίες έξι τέτοιες έδρες κατασκευάζει τον κύβο. «Η σύνθεση έξι τέτοιων τετραγώνων απέδωσε οκτώ στερεές γωνίες που αποτελούνται από τρεις επίπεδες ορθές…». [B6-55c]



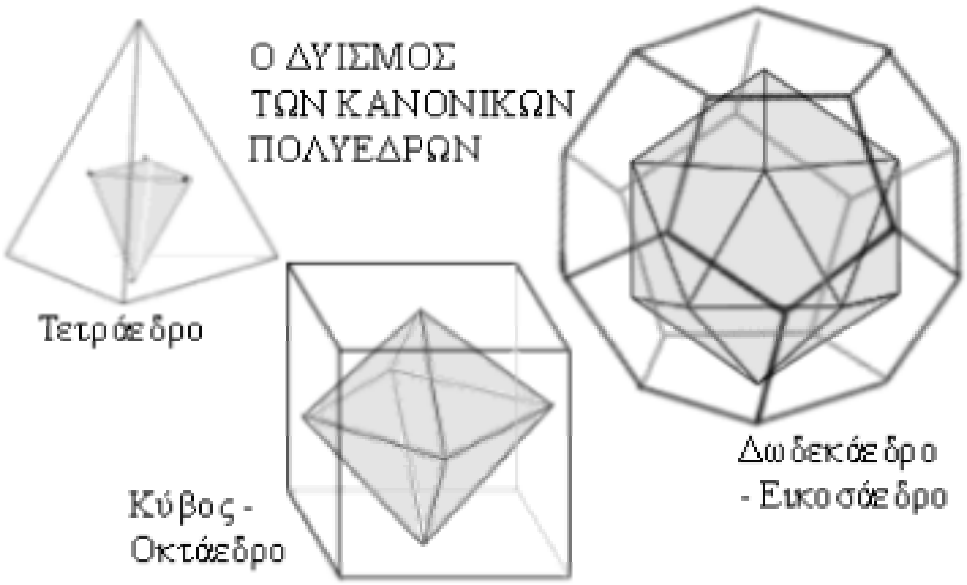
ΔΙΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Έχοντας κατασκευάσει τα τέσσερα αυτά πολύεδρα ο Πλάτων τα διένειμε στη φωτιά, τη γη, το νερό και τον αέρα, χρησιμοποιώντας λογικοφανείς εξηγήσεις. Στη φωτιά έδωσε το τετράεδρο επειδή είναι «το πιο ευκίνητο, το πιο κοφτερό και οξύ προς κάθε κατεύθυνση και το πλέον ελαφρύ, αφού αποτελείται από τον μικρότερο αριθμό ίσων μερών» [Β6-56b]. Με όμοιο σκεπτικό, έδωσε στη γη τη μορφή του κύβου επειδή είναι η πιο δυσκίνητη και πιο η πιο εύπλαστη, στον αέρα έδωσε το σχήμα του οκτάεδρου επειδή είναι το ενδιάμεσο τόσο σε μέγεθος όσο και σε οξύτητα, ενώ στο νερό αντιστοίχισε το εικοσάεδρο, για το οποίο γράφει πως είναι το μεγαλύτερο σε μέγεθος και το λιγότερο οξύ.

Με την ιδέα ότι τα τέσσερα στερεά σχηματίζονται από στοιχειώδη τρίγωνα και μάλιστα από δύο είδη, ο Πλάτων δικαιολογεί την άποψή του πώς τρία μόνο από τα πολύεδρα, το τετράεδρο, το εικοσάεδρο και το οκτάεδρο έχουν τη δυνατότητα να μετασχηματίζονται αμοιβαία. Πρόκειται για την ιδέα της μετάβασης από μείζονα σε σμικρά και αντίστροφα [Β-6, σελ 439]. Μικρότερος αριθμός μεγαλύτερων σωμάτων, π.χ. νερού αποσυντίθεται στα συστατικά του σκαληνά τρίγωνα τα οποία συντίθενται σε μεγάλο αριθμό μικρών σωμάτων, όπως η φωτιά. Αντίστροφα, μεγάλος αριθμός μικρών μορίων αποσυντίθενται στα στοιχειώδη σκαληνά τρίγωνα τα οποία με τη σειρά τους διαρθρώνονται κατάλληλα ώστε να σχηματίσουν ένα μεγάλο μόριο άλλου είδους όπως του νερού. Αντίθετα, ο Πλάτων πιστεύει ότι «είναι αδύνατο στα μέρη της γης να μετασχηματιστούν σε μέρη άλλου είδους» [Β-6, 56d], επειδή στο στοιχείο της γης έχει αποδώσει τον κύβο που παράγεται από διαφορετικό είδος τριγώνου, το ισοσκελές.

ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

Η άποψη του Πλάτωνα είναι λανθασμένη όσον αφορά τα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάζει. Στην πραγματικότητα, ο κύβος και το οκτάεδρο είναι αλληλοπαραγόμενα, δηλαδή ο κύβος μετασχηματίζεται με λογικό τρόπο σε οκτάεδρο και αντίστροφα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται *δυϊσμός*. Τα κέντρα των επιφανειών του κύβου συμπίπτουν με τις κορυφές του δυϊκού του και αν τα ενώσουμε τότε θα προκύψει το οκτάεδρο. Δηλαδή το πλήθος των εδρών γίνεται πλήθος κορυφών και αντίστροφα, ενώ το πλήθος των ακμών δεν αλλάζει αφού και τα δύο έχουν το ίδιο, όπως είδαμε στον πίνακα 1. Όμοια, το εικοσάεδρο με το δωδεκάεδρο είναι ζεύγος δυϊκών στερεών. Αν πάρουμε τα κέντρα των είκοσι εδρών του εικοσάεδρου και τα ενώσουμε θα προκύψει το δωδεκάεδρο με τις είκοσι κορυφές. Αντίστροφα, τα κέντρα των εδρών του δωδεκάεδρου είναι οι δώδεκα κορυφές του εικοσάεδρου. Το τετράεδρο είναι αυτοπαραγόμενο, δηλαδή εάν ενώσουμε τα κέντρα των εδρών του, προκύπτει πάλι τετράεδρο. Τα σχήματα που ακολουθούν δείχνουν ακριβώς αυτό.



Ο δυϊσμός των κανονικών πολύεδρων μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι κάθε συμμετρία ενός κανονικού πολύεδρου είναι συμμετρία και του δυϊκού του, αφού όπως φαίνεται και από τα παραπάνω σχήματα κάθε *ισομετρία γνήσια ή μη* που αφήνει αναλλοίωτο το ένα σχήμα, θα αφήνει αναλλοίωτο και το δυϊκό του. Άρα κάθε συμμετρία του κύβου είναι συμμετρία και του οκτάεδρου και αντίστροφα κάθε συμμετρία του οκτάεδρου είναι συμμετρία και του κύβου. Μιλώντας με τη ορολογία του 2^{ου} κεφαλαίου περί συμμετρίας, μπορούμε να πούμε ότι ο κύβος και το οκτάεδρο έχουν την ίδια ομάδα συμμετρίας, την οκταεδρική. Όμοια το εικοσάεδρο με το δωδεκάεδρο ως δυικά θα έχουν τις ίδιες συμμετρίες, άρα και την ίδια ομάδα συμμετρίας, που λέγεται συνήθως εικοσαεδρική. Τέλος, το τετράεδρο, που όπως είπαμε αναπαράγει τον εαυτό

του, έχει την τετραεδρική ομάδα συμμετρίας. Ο Weyl αποδεικνύει ότι αυτές οι τρεις ομάδες μαζί με τις κυκλικές ομάδες C_n των περιστροφών γύρω από έναν άξονα ε, και τις ομάδες D'_n, που αποτελούνται από όλες τις προηγούμενες γνήσιες περιστροφές και επιπλέον όλες τους κατοπτρισμούς, που στο χώρο ισοδυναμούν με στροφές κατά 180 μοίρες (οπότε στο χώρο η ομάδα D'_n γίνεται ομάδα γνήσιων περιστροφών), συνιστούν όλες τις δυνατότητες που υπάρχουν για ομάδες γνήσιων μόνο ισομετριών του χώρου. [Β-1, σελ 103, Παράρτημα Α]

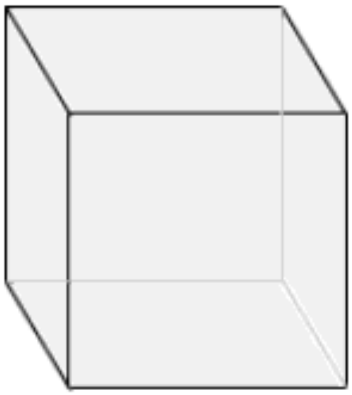
Σε αντίθεση με το επίπεδο, όπου το τρίγωνο, το τετράγωνο και το πεντάγωνο δεν είναι δυνατό να παραχθούν το ένα από το άλλο, στις τρεις διαστάσεις, στο χώρο, μπορούμε να περάσουμε από το δωδεκάεδρο ή το εικοσάεδρο στον κύβο, από τον κύβο στο τετράεδρο. Η Ghyka στο βιβλίο της γράφει: «Για παράδειγμα, οι 12 κορυφές του εικοσάεδρου, καθώς και οι 6 από τις ακμές του, βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια ενός νοητού κύβου. Οι 8 κορυφές αυτού του κύβου συμπίπτουν με 8 κορυφές ενός δωδεκάεδρου το οποίο έχει την ακμή του ίση με του εικοσαέδρου. Οι υπόλοιπες 12 κορυφές του δωδεκάεδρου και 6 από τις ακμές του βρίσκονται στην επιφάνεια ενός άλλου περιέχοντος κύβου, τέτοιου ώστε η ακμή του και η ακμή του πρώτου κύβου πρέπει να είναι σε αναλογία Φ= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,618. Με τον ίδιο τρόπο, οι 6 ακμές κάθε τετραέδρου μπορούν να οριστούν ως διαγώνιες στις 6 έδρες ενός κύβου, και οι 4 κορυφές του τετραέδρου να συμπίπτουν με 4 από τις κορυφές του κύβου (οι υπόλοιπες 4 κορυφές του κύβου και οι 6 άλλες διαγώνιες παράγουν ακόμη ένα τετράεδρο). Ακόμη: οι 20 κορυφές του δωδεκάεδρου είναι επίσης οι κορυφές πέντε τετραέδρων, ή πέντε κύβων (2 κορυφές κύβου για κάθε κορυφή δωδεκάεδρου)». [Β-4[

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Τα πέντε κανονικά στερεά, πέρα από τη χρήση τους στον Πλάτωνα ως μέρος της κοσμολογίας του, μελετήθηκαν εκτενώς και χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο της αναγέννησης από τους γεωμέτρες-καλλιτέχνες λόγω της συμμετρίας τους. Εδώ θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τις συμμετρίες του κύβου και του τετράεδρου.

Οι Συμμετρίες του Κύβου

Ας ξεκινήσουμε από τον κύβο επειδή έχει το πιο οικείο σχήμα. Ο κύβος έχει οκτώ κορυφές και σε κάθε του κορυφή συναντώνται τρεις ακμές.



ΚΥΒΟΣ

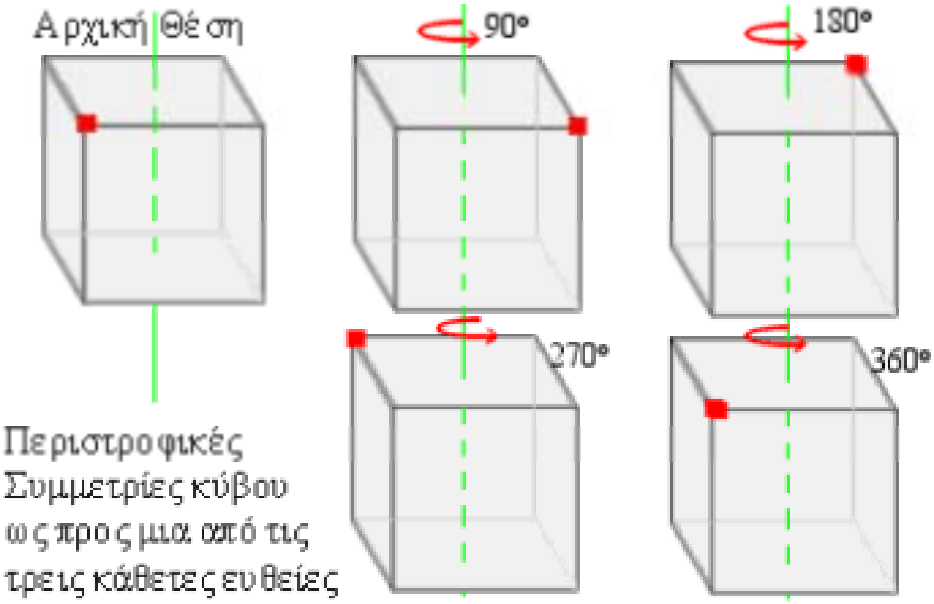
Εδρες 6
Κορυφές....8
Ακμές:.....12

Δυικό: Οκτάεδρο

Συμμετρία:
Οκταεδρική

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ

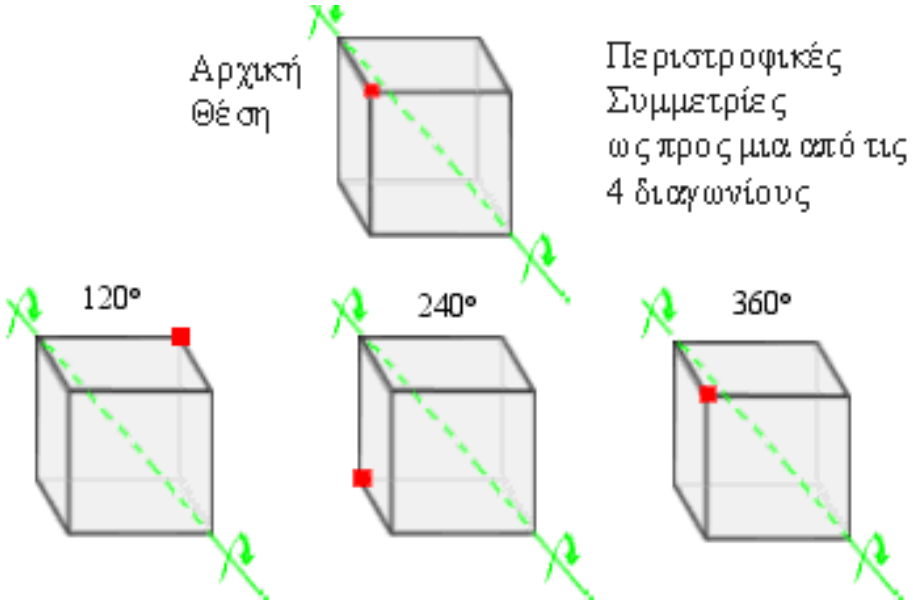
Στον κύβο υπάρχουν 3 κάθετες ευθείες που διέρχονται από τα κέντρα των εδρών του κύβου ως προς τις οποίες ο κύβος έχει 4 δυνατές περιστροφικές συμμετρίες σε κάθε μία. Δηλαδή γίνεται να περιστρέψουμε τον κύβο γύρω από μια τέτοια κάθετη ευθεία σε αυτόν κατά τρεις διαφορετικές γωνίες ($90°$, $180°$, $270°$, $360°$) χωρίς να αλλάξει ο προσανατολισμός του κύβου, δηλαδή θα μείνει αναλλοίωτος στη μορφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



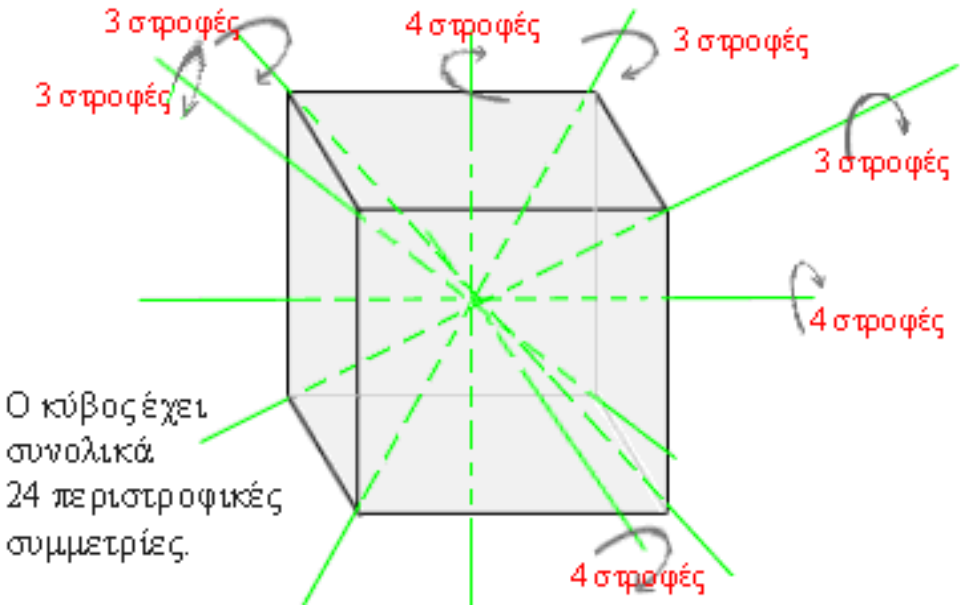
Συνολικά έχουμε 3 x 4 = 12 περιστροφικές συμμετρίες ως προς κάθε μια κάθετη ευθεία.

Ακόμη υπάρχουν τέσσερις διαγώνιες ευθείες ως προς τις οποίες ο κύβος έχει τρεις περιστροφικές συμμετρίες για κάθε μια διαγώνιο. Δηλαδή μπορούμε να περιστρέψουμε τον κύβο, γύρω από κάθε μια τέτοια διαγώνιο, κατά τρεις

διαφορετικές γωνίες, χωρίς να αλλάξει ο προσανατολισμός του κύβου, δηλαδή θα μείνει φαινομενικά αναλλοίωτος.



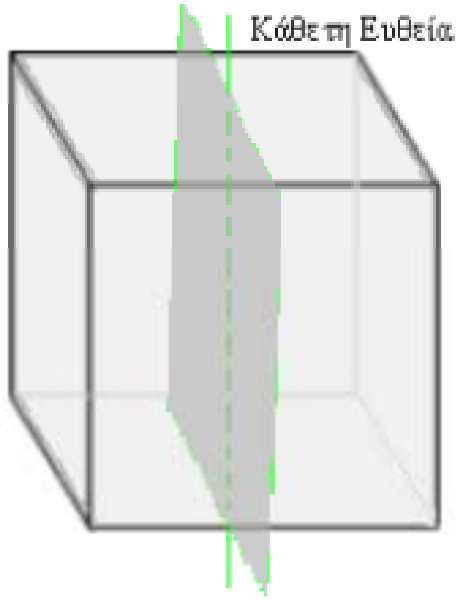
Συνολικά υπάρχουν 4 x 3 = 12 περιστροφικές συμμετρίες ως προς τις διαγώνιες αυτές. Άρα έχουμε 12 + 12 = 24 δυνατές περιστροφικές συμμετρίες ως προς όλες αυτές τις ευθείες.

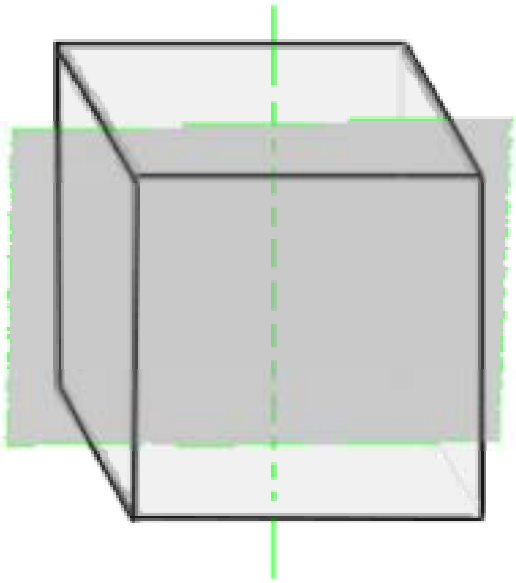


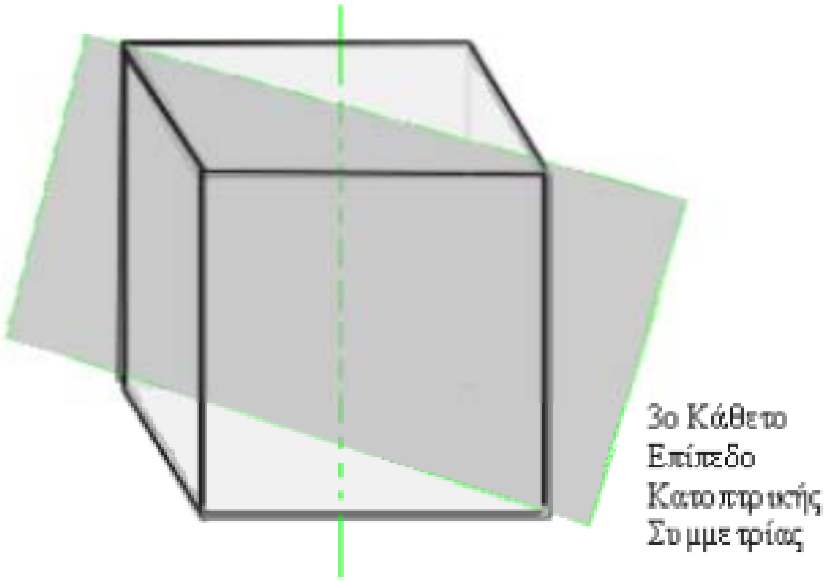
ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ

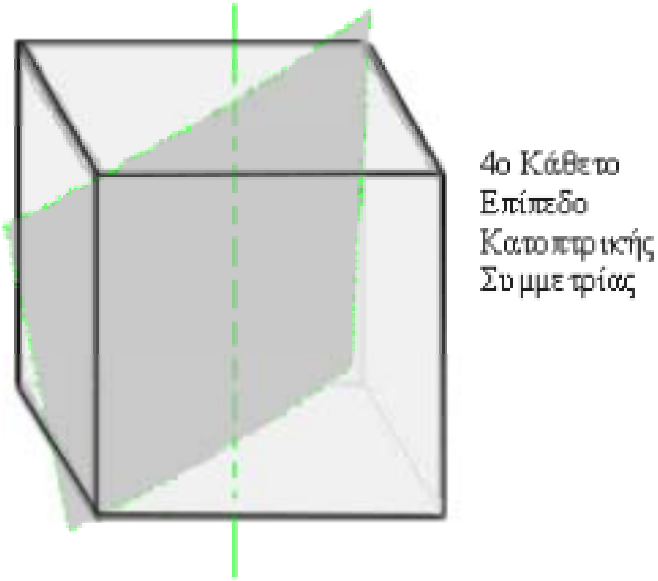
Επίσης, κάθε μια από τις κάθετες ευθείες ορίζει τέσσερα διαφορετικά και ανά δύο κάθετα επίπεδα ως προς το οποία ο κύβος έχει κατοπτρική συμμετρία. Δηλαδή εάν τα επίπεδα αυτά τα θεωρήσουμε ως αμφίπλευρους καθρέπτες, τότε κάθε πλευρά του καθρέπτη θα απεικονίζει το υπόλοιπο μισό του κύβου, όπως στα σχήματα που ακολουθούν. Έχουμε τέσσερις κατοπτρικές συμμετρίες για

κάθε μια από τις τρεις κάθετες ευθείες, οπότε υπάρχουν συνολικά 3 x 4 = 12 κατοπτρικές συμμετρίες ακόμη.

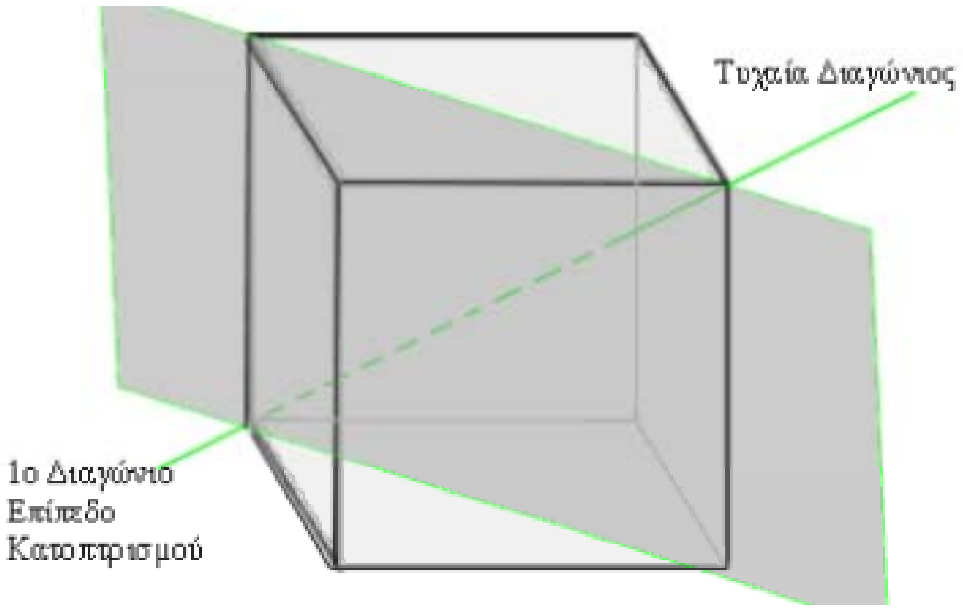


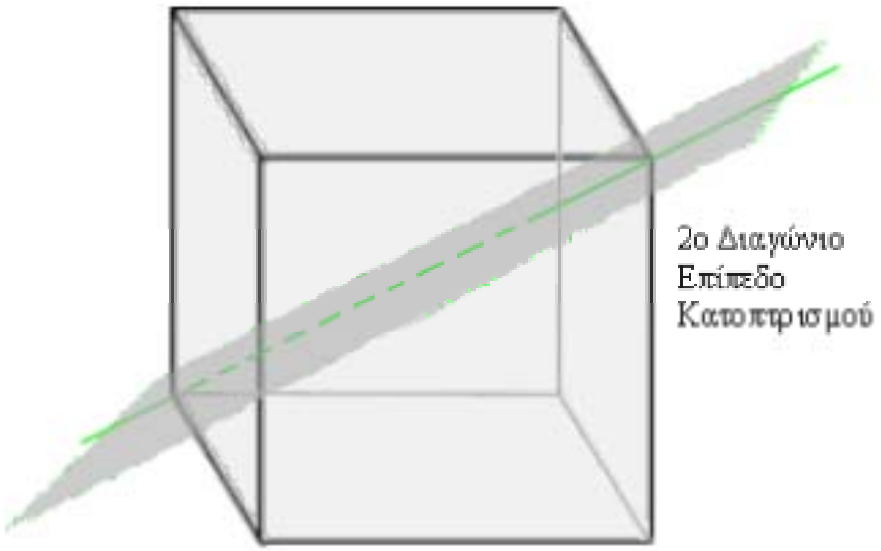


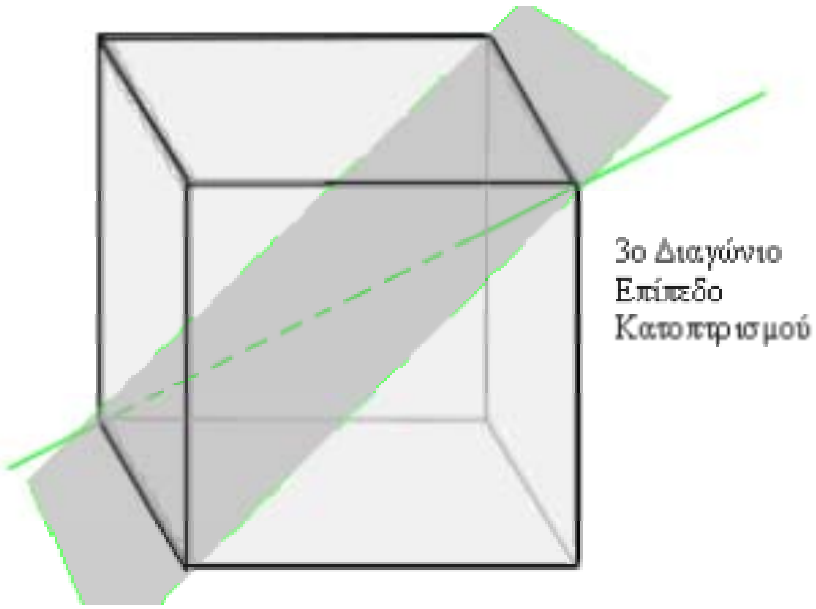




Τέλος, για κάθε μια από τις τέσσερις διαγώνιες ευθείες ορίζονται τρία επίπεδα ανάκλασης, δηλαδή τρία επίπεδα ως προς τα οποία ο κύβος είναι αμφίπλευρα (κατοπτρικά) συμμετρικός, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Οπότε έχουμε ακόμη 4 x 3 = 12 κατοπτρικές συμμετρίες.


Τυχαία Διαγώνιος
1ο Διαγώνιο
Επίπεδο
Κατοπτρισμού


2ο Διαγώνιο
Επίπεδο
Κατοπτρισμού

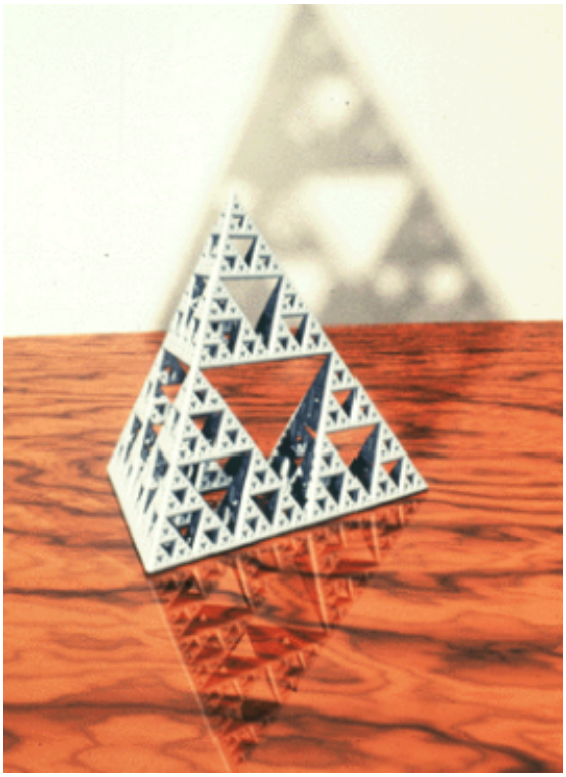


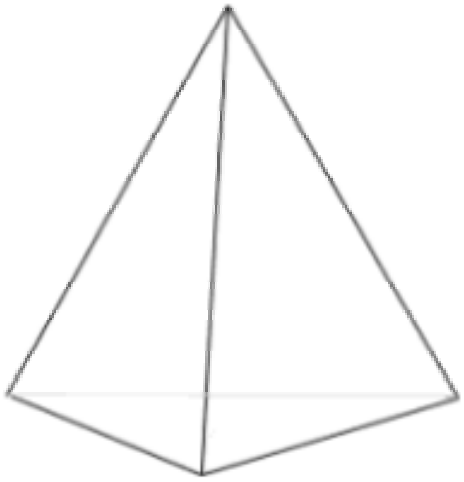
Άρα συνολικά βρήκαμε 12 + 12 + 12 + 12 = 48 συμμετρίες, εκ των οποίων οι 24 είναι περιστροφικές και άλλες τόσες είναι κατοπτρικές.

Όπως έχουμε πει προηγουμένως, οι συμμετρίες του κύβου σχηματίζουν ομάδα, την λεγόμενη οκταεδρική με τάξη 48 [Ο Weyl λεει 24].

Οι συμμετρίες του τετράεδρου

Το τετράεδρο έχει, όπως έχουμε δει, τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα ως έδρες και 4 κορυφές που σε κάθε μια προσπίπτουν 3 ακμές. Οι δυνατές συμμετρίες του τετράεδρου, με ανάλογο τρόπο όπως στον κύβο, είναι περιστροφές και ανακλάσεις.





ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ

Έδρες:.....4
Κορυφές:.....4
Ακμές:.....6

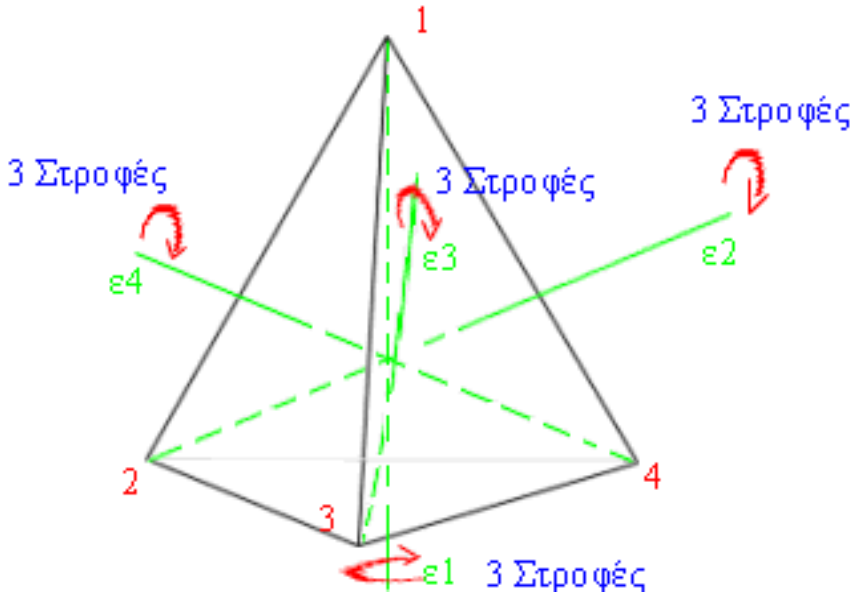
Δυικό: Τετράεδρο

Ομάδα Συμμετρίας:
Τετραεδρική

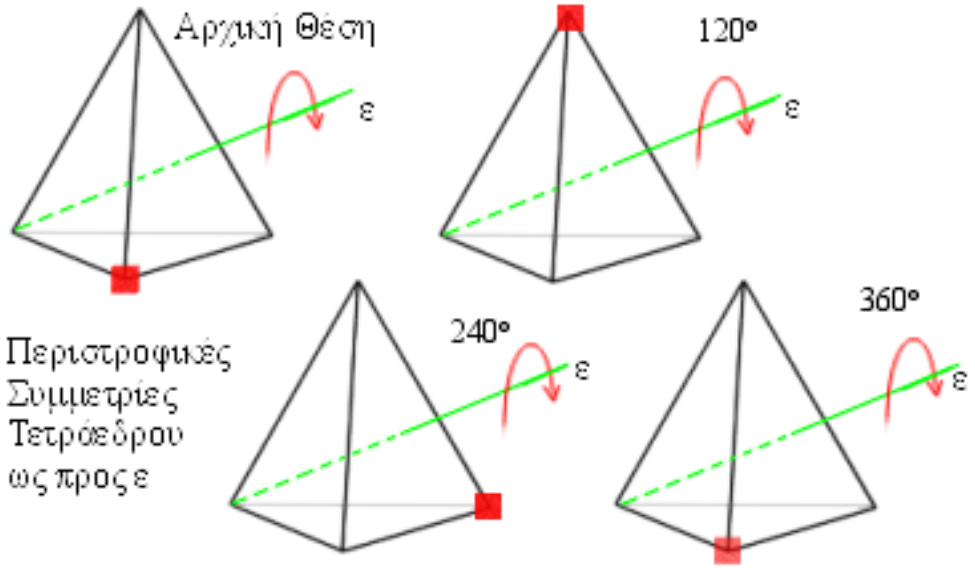
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΣ

Το κέντρο κάθε έδρας και η απέναντι από αυτήν κορυφή ορίζουν έναν άξονα περιστροφής γύρω από τον οποίο το τετράεδρο έχει τριπλή περιστροφική

συμμετρία. Προφανώς, υπάρχουν 4 τέτοιοι άξονες περιστροφικής συμμετρίας, ε1, ε2, ε3, ε4, όπως φαίνεται στο σχήμα.



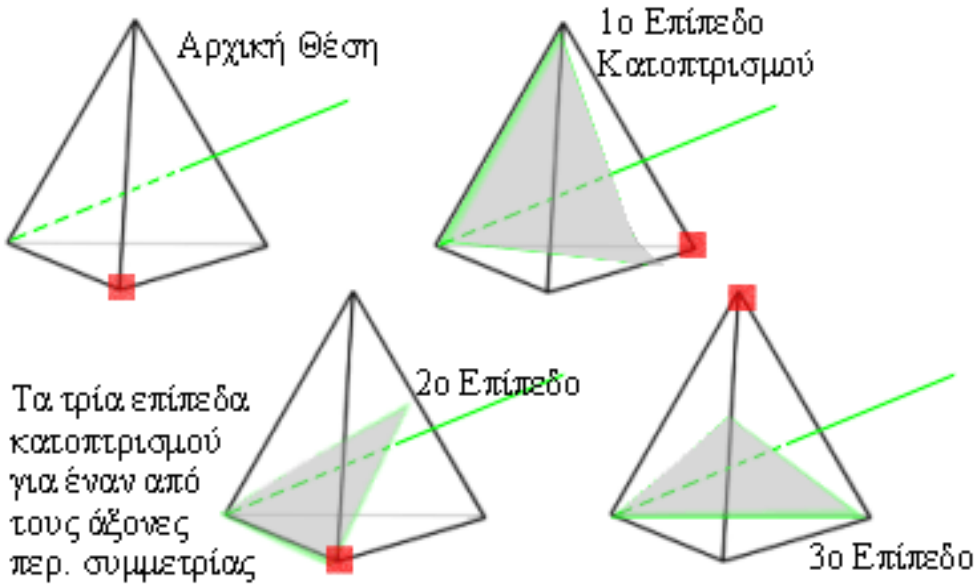
Για κάθε έναν άξονα υπάρχουν τρεις δυνατές γωνίες ($^{120°,240°360°}$) κατά τις οποίες γίνεται να στρέψουμε το τετράεδρο γύρω από τον άξονα περιστροφής χωρίς να αλλάξει ο προσανατολισμός του σχήματος.



Συνολικά, έχουμε 4 * 3 = 12 περιστροφικές συμμετρίες.

Ακόμη, σε κάθε ένα τέτοιο άξονα αντιστοιχούν 3 επίπεδα κατοπτρισμού, δηλαδή 3 επίπεδα ως προς το οποία το τετράεδρο είναι αμφίπλευρα κατοπτρικό. Το παρακάτω σχήμα υποδεικνύει ακριβώς τις τρεις κατοπτρικές

συμμετρίες που αντιστοιχούν σε έναν από τους άξονες συμμετρίας του τετράεδρου.



Σε κάθε άξονα αντιστοιχούν 3 κατοπτρισμοί, οπότε έχουμε 4 * 3 = 12 κατοπτρισμούς συνολικά.

Συνολικά, η ομάδα των συμμετριών του κανονικού τετράεδρου, η τετραεδρική, έχει τάξη 12 + 12 = 24 στοιχεία.

Με παρόμοιους συλλογισμούς με τους παραπάνω προκύπτει ο εξής πίνακας των συμμετριών των πλατωνικών σωμάτων:

ΣΩΜΑΤΑ	**ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ**	**ΟΜΑΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ**
Τετράεδρο	24	Τετραεδρική
Κύβος	48	Οκταεδρική
Οκτάεδρο	48	Οκταεδρική
Δωδεκάεδρο	120	Εικοσαεδρική
Εικοσάεδρο	120	Εικοσαεδρική

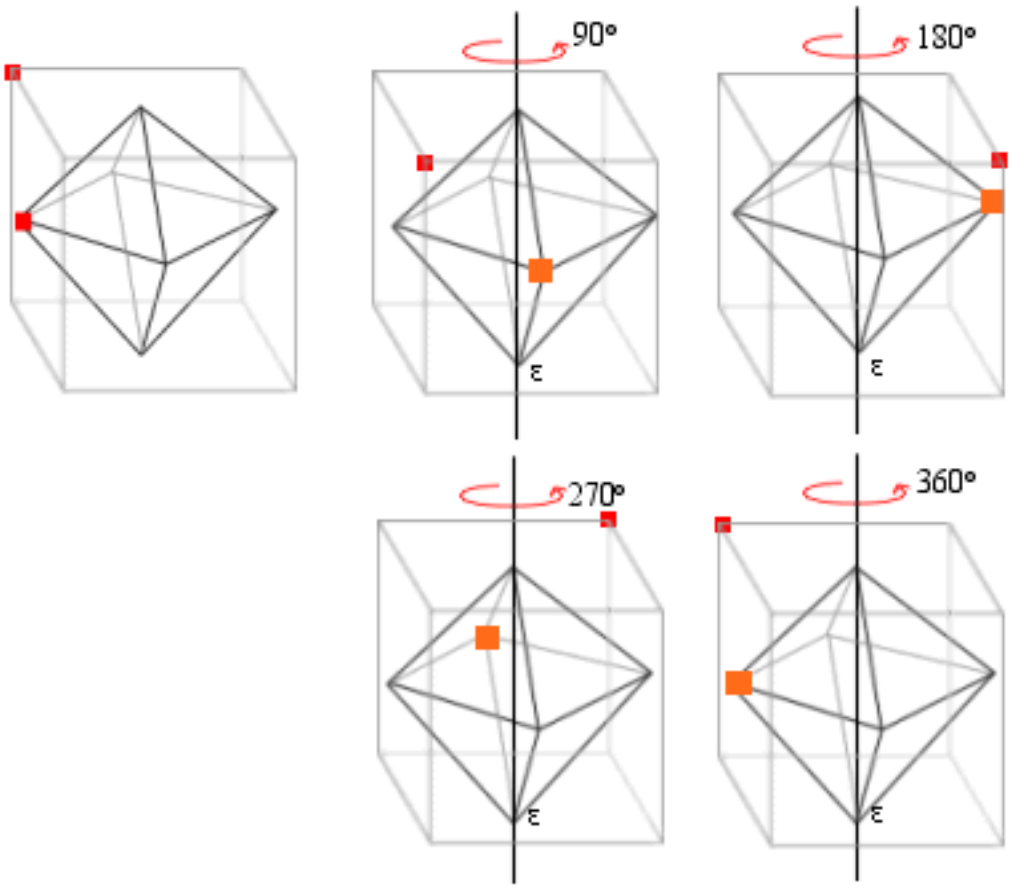
ΔΥΙΣΜΟΣ ΚΥΒΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, τα κανονικά πολύεδρα εμφανίζουν το φαινόμενο του δυϊσμού. Συγκεκριμένα, ο κύβος έχει δυϊκό αντίστοιχο το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο αντιστοιχίζεται με το δωδεκάεδρο, ενώ το τετράεδρο παράγει τον εαυτό του.

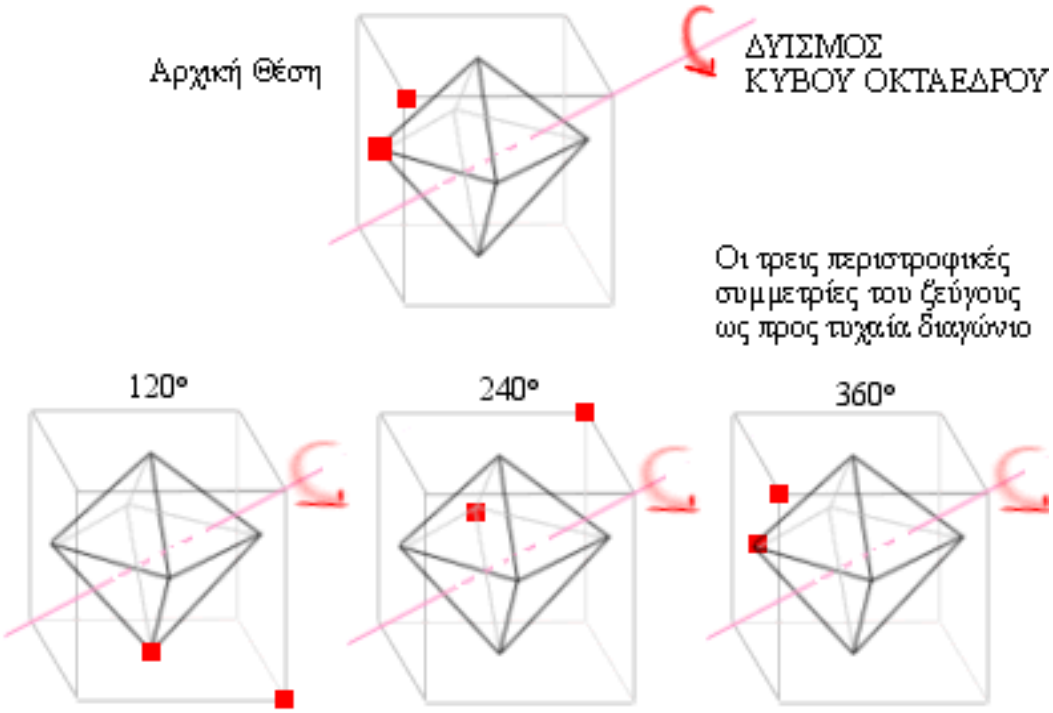
Βάσει αυτής της ιδιότητας, τα δυικά πολύεδρα έχουν το ίδιο αριθμό συμμετριών, αφού κάθε μετασχηματισμός που αφήνει απαράλλαχτο ένα πολύεδρο, θα κάνει το ίδιο και για το δυικό του. Οπότε περιμένουμε ότι το οκτάεδρο θα έχει τις ίδιες συμμετρίες με τον κύβο ποιοτικά και ποσοτικά, που σημαίνει ότι θα έχει την ίδια ομάδα συμμετρίας, την οποία ονομάζουμε οκταεδρική. Αυτό θα δείξουμε αμέσως τώρα.

Το οκτάεδρο έχει τόσες κορυφές όσες και οι έδρες του κύβου, δηλαδή έξι. Επιπλέον σε κάθε κορυφή συμπίπτουν τέσσερις ακμές. Αν θεωρήσουμε την ευθεία που διέρχεται από δύο αντι-διαμετρικές κορυφές του, και η οποία προφανώς διέρχεται από τα κέντρα των αντίστοιχων εδρών του περιγεγραμμένου κύβου, όπως στο πιο πάνω σχήμα, τότε υπάρχουν φυσιολογικά τέσσερις περιστροφικές συμμετρίες γύρω από ένα τέτοιο κατακόρυφο άξονα κατά γωνίες $90°$, $180°$, $270°$, $360°$, που εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:

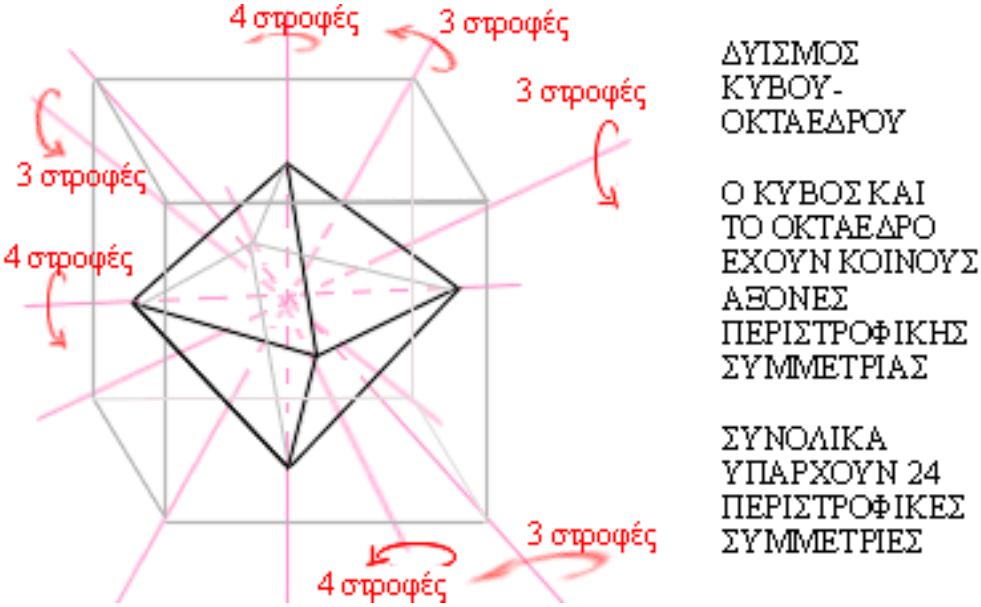
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ε



Πέραν από αυτές τις συμμετρίες, υπάρχουν και εκείνες ως προς τους τέσσερις διαγώνιους άξονες του κύβου που διέρχονται από τα κέντρα των παράλληλων εδρών του οκταέδρου. Σε κάθε τέτοιο άξονα αντιστοιχούν τρεις στροφές κατά $120°, 240°, 360°$ αντίστοιχα. Στο σχήμα φαίνονται οι τρεις περιστροφικές συμμετρίες για μια τυχαία διαγώνιο.

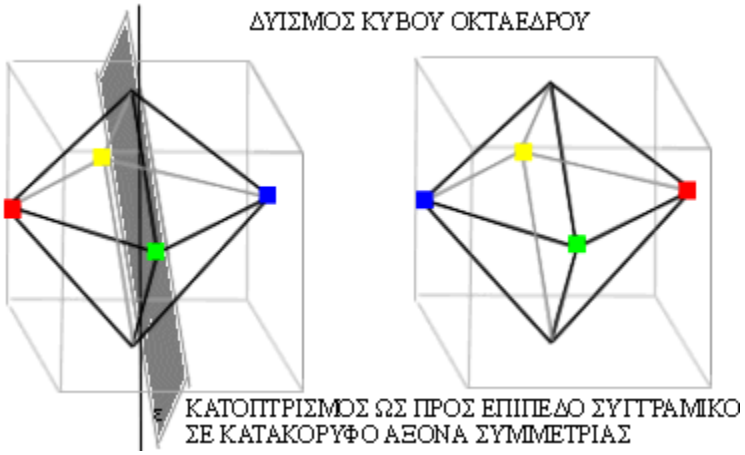


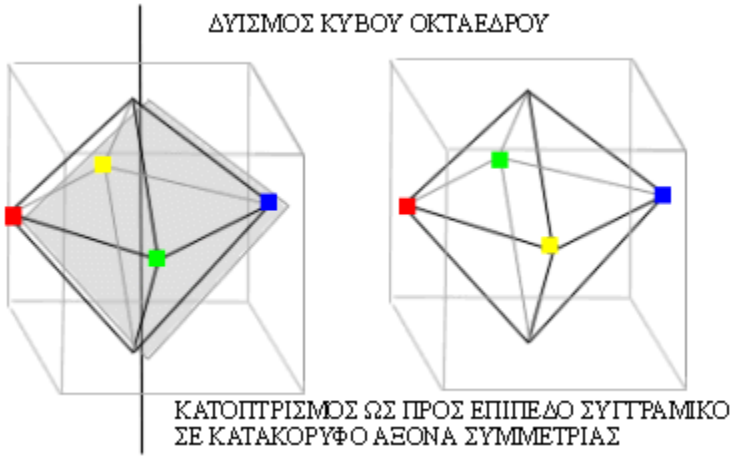
Συνολικά υπάρχουν επτά άξονες περιστροφικής συμμετρίας για το δυικό ζεύγος κύβος-οκτάεδρο. Οι τρεις κατακόρυφοι έχουν από τέσσερις περιστροφικές συμμετρίες και οι τέσσερις διαγώνιου ορίζουν από τρεις συμμετρίες, συνεπώς έχουμε συνολικά 12+12=24 περιστροφικές συμμετρίες.

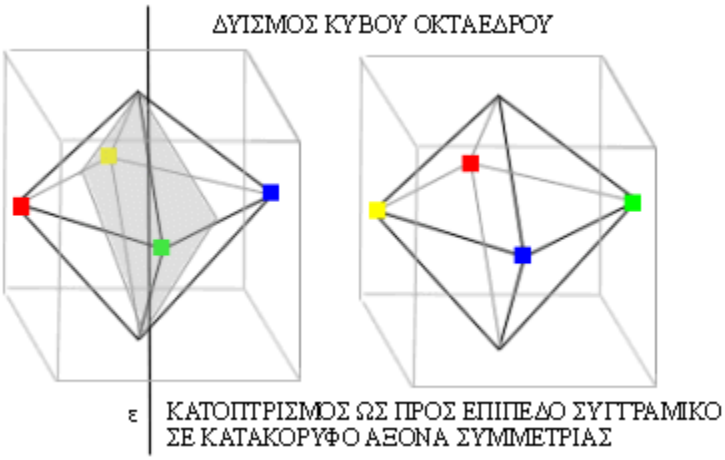


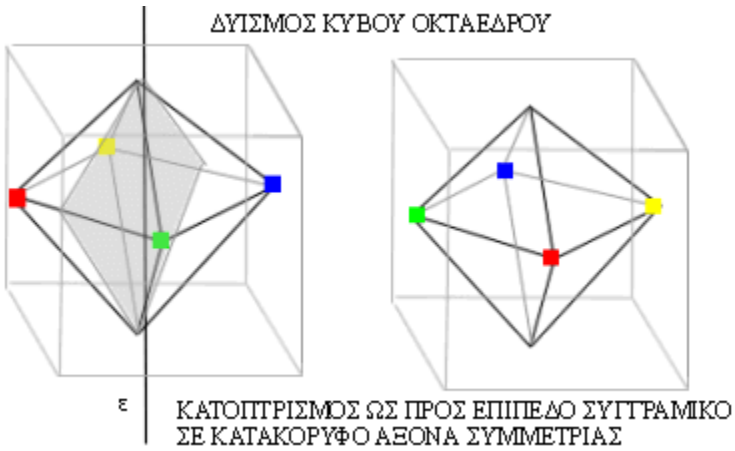
Επιπλέον, για κάθε κατακόρυφο άξονα υπάρχουν τέσσερα επίπεδα συγγραμικά με αυτόν τα οποία διέρχονται επίσης από τις κορυφές από τις οποίες διέρχεται

και η ευθεία. Τα επίπεδα αυτά θα σχηματίζουν γωνία $a = \frac{1}{2}90° = 45°$ μεταξύ τους και θα ορίζουν τέσσερις κατοπτρικές συμμετρίες του οκτάεδρου, όπως φαίνεται στα σχήματα:



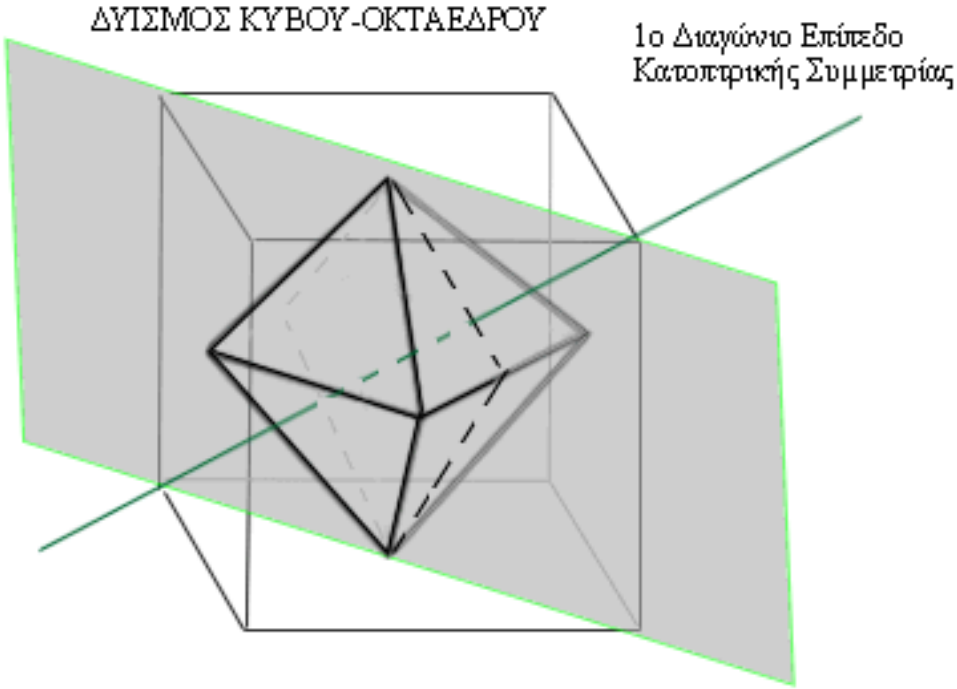


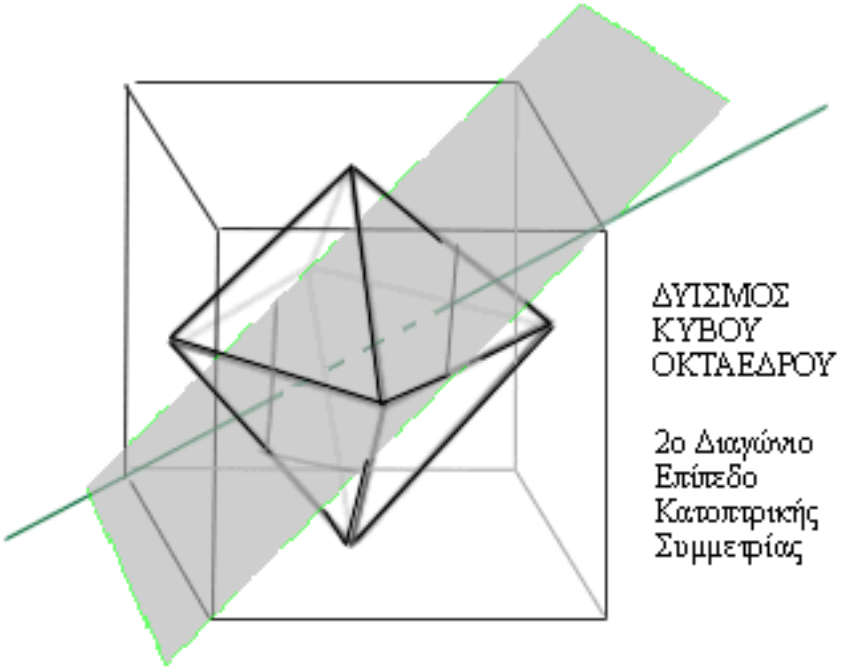


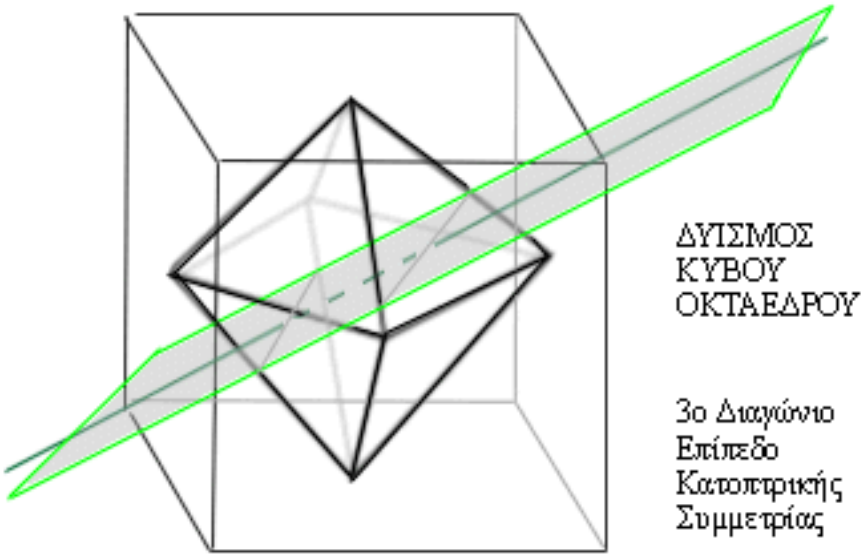


Προφανώς κάθε ένα από αυτά ταυτίζεται με ένα από τα επίπεδα κατοπτρισμού του αντίστοιχου κύβου.

Ενώ σε αντιστοιχία με τους «διαγώνιους» άξονες υπάρχουν πάλι τα εξής τρία κατοπτρικά επίπεδα.







Άρα βρήκαμε τέσσερα κατοπτρικά επίπεδα για κάθε έναν από τους τρεις κατακόρυφους άξονες συμμετρίας και τρία επίπεδα κατοπτρικής συμμετρίας για κάθε ένα από τους τέσσερις διαγώνιους άξονες περιστροφικής συμμετρίας.

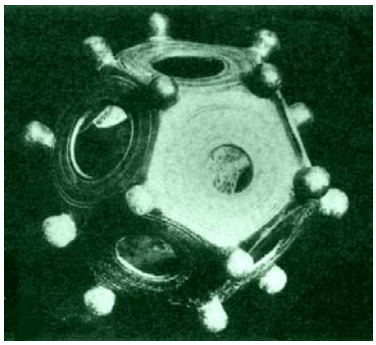
Συνολικά υπάρχουν 4*3+3*4=12+12=24 επίπεδα κατοπτρικής συμμετρίας, ακριβώς τα ίδια με τον κύβο.

Οπότε το οκτάεδρο έχει ακριβώς τόσες συμμετρίες όσες και ο δυικός του κύβος, δηλαδή 24 περιστροφικές και 24 κατοπτρικές, συνολικά 48 και αποδείξαμε ότι οι συμμετρίες αυτές είναι και ποιοτικά οι ίδιες αφού τόσο οι άξονες περιστροφικής συμμετρίας όσο και τα επίπεδα κατοπτρισμού του κύβου και του οκτάεδρου ταυτίζονται.

ΧΡΗΣΕΙΣ & ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

Όπως είδαμε στην εισαγωγή αλλά και νωρίτερα στο κεφάλαιο αυτό, τα πολύεδρα εμφανίζονται από την αρχαιότητα και ειδικότερα στην κοσμολογία του Πλάτωνα. Ο Weyl [B-1, σελ 99] αναφέρει ότι έχει διατυπωθεί η άποψη πως αντικειμενικός σκοπός της αρχαιοελληνικής επαγωγικής γεωμετρίας ήταν η κατασκευή των κανονικών πολύεδρων. Όμως προσθέτει πως η έννοια της λέξης συμμετρικός ήταν διαφορετική στην αρχαία ελληνική: «Στην συνηθισμένη χρήση, *σύμμετρος* σημαίνει ανάλογος, ενώ στον Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με το δικό μας *ρητόν*: η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι μεγέθη ασύμμετρα (άρρητα).

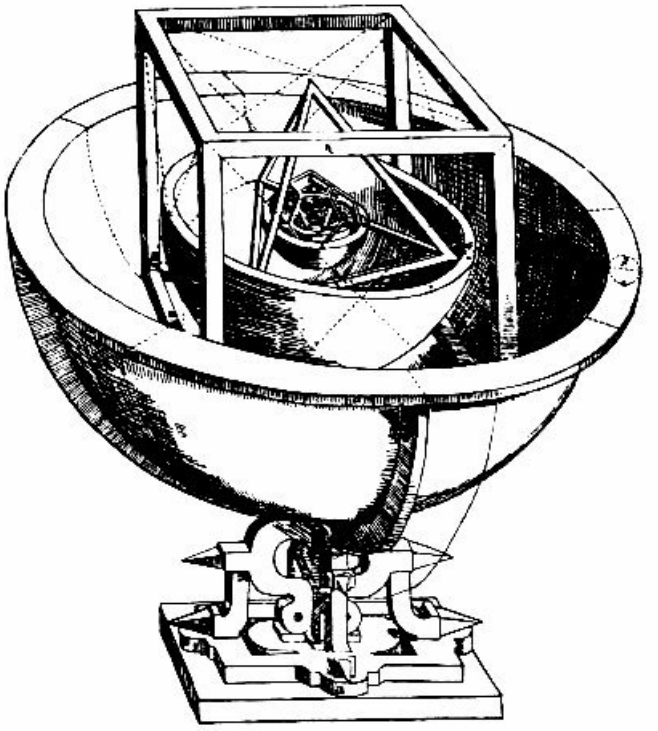
Στην εισαγωγή αναφέραμε ότι κανονικό δωδεκάεδρο σώζεται από την εποχή της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας. Ένα από αυτά φαίνεται ελαφρά χρωματισμένο στην φωτογραφία. [Bi-2]

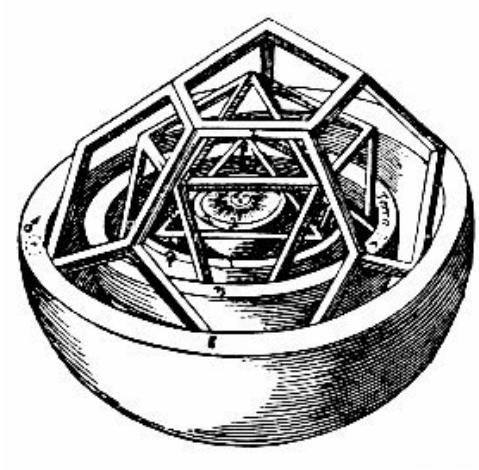


Ο Weyl [B-1, σελ 99] υποστηρίζει ότι χρησιμοποιούνταν σαν ζάρια και πως είχαν κάποια θρησκευτική σημασία στον ετρουσκικό πολιτισμό.

Πολλούς αιώνες μετά τον Πλάτωνα ο Kepler, πριν ανακαλύψει και διατυπώσει τους τρεις νόμους περί των κινήσεων των πλανητών, ήταν πεπεισμένος ότι οι αποστάσεις των έξι γνωστών του πλανητών (δεν είχαν ανακαλυφθεί ακόμη ο Ουρανός, ο Ποσειδώνας και ο Πλούτωνας) συσχετίζονταν με τα πλατωνικά

στερεά. Συγκεκριμένα, θεωρούσε πως σε κάθε σφαίρα που αντιστοιχούσε ένας πλανήτης, κατά σειρά Κρόνος, Δίας, Άρης, Γη, Αφροδίτη, Ερμής είναι διαδοχικά εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο ένα από τα κανονικά σώματα κατά σειρά ένας κύβος, ένα τετράεδρο, ένα δωδεκάεδρο, ένα οκτάεδρο και ένα εικοσάεδρο, όπως φαίνεται στις παρακάτω φωτογραφίες [Bi-2].





Στην σχετική πραγματεία που εξέδωσε το 1595 Mysterium Cosmographicum [Κοσμογραφικό Μυστήριο] ανέπτυσσε αυτήν την θεωρία του. Ακόμη προσπαθούσε να εξηγήσει τους λόγους που ο Δημιουργός χρησιμοποιούσε τα συγκεκριμένα στερεά και με την συγκεκριμένη διάταξη και επιπλέον παραλλήλιζε τις ιδιότητες των ουράνιων σωμάτων με αυτές των πλατωνικών στερεών.

Στο πρώτο σχήμα, η έξω σφαίρα είναι ο Κρόνος και η εσώτερη ο Δίας. Το δεύτερο είναι μια μεγέθυνση του εσωτερικού του μοντέλου. Βέβαια, το μοντέλο του για το ηλιακό σύστημα είναι λάθος αφού εκτός του ότι αγνοεί την ύπαρξη των τριών επιπλέον πλανητών, οι διαπλανητικές αποστάσεις που προβλέπονται σε αυτό δεν είναι αρκετά ακριβής. Ο Kepler ήταν επιστήμονας και το παραδέχτηκε τελικά. [Bi-2]

Τα κανονικά πολύεδρα εμφανίζονται, στη φύση, στους σκελετούς πολλών ακτινόζωων (Radiolaria) [Β-1, σελ 100]. Ειδικότερα, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο.

Μια σημαντική σύγχρονη εφαρμογή των πολύεδρων επινόησε ο Αμερικάνος μηχανικός και αρχιτέκτονας Buckminster Fuller (1895-1983), που ανέπτυξε τον γεωδαισιακό θόλο, το μόνο μεγάλο θόλο που μπορεί να στηριχθεί κατευθείαν στο έδαφος σαν πλήρης κατασκευή και το μόνο πρακτικό είδος κτιρίου που δεν έχει περιοριστικές διαστάσεις, δηλαδή τέτοιες πέρα από τις οποίες η κτιριακή αντοχή θα είναι ανεπαρκής. [Β-Β]

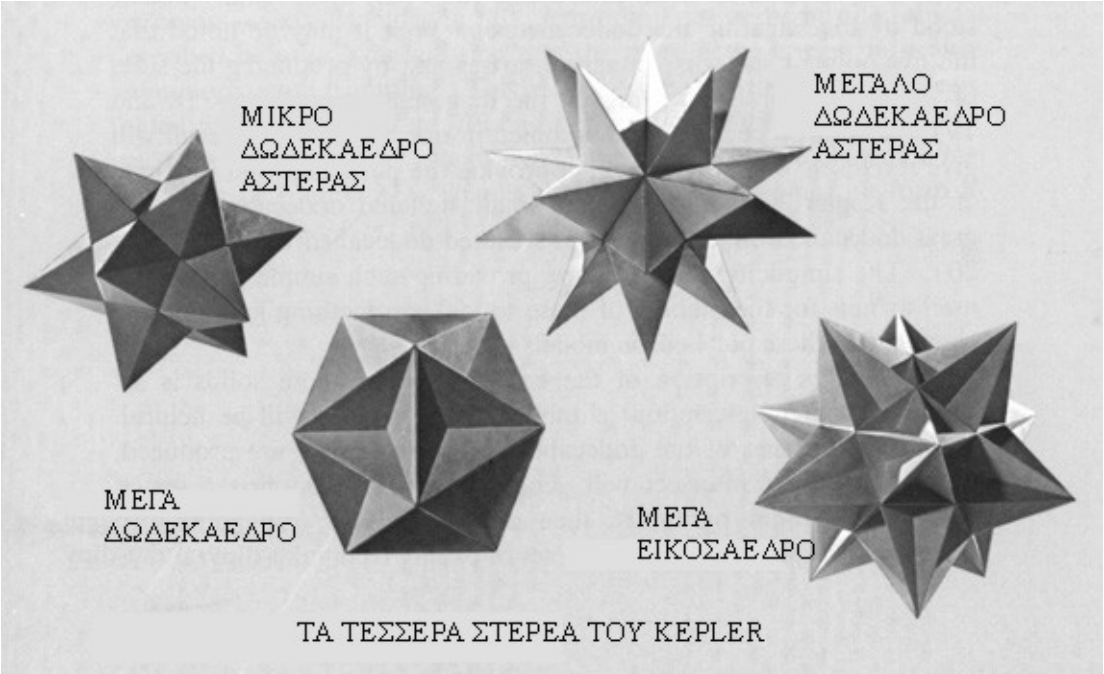
Θεωρώντας ότι υπάρχει στη φύση ένα διανυσματικό σύστημα δυνάμεων που δίνει μέγιστη αντοχή με τις λιγότερες κατασκευές, όπως στην περίπτωση των τετραεδρικών πλεγμάτων σε οργανικά στοιχεία και μέταλλα, ο Fuller σχεδίασε ένα διανυσματικό σύστημα γεωμετρίας, που αποκαλούσε "Energetic-Synergetic geometry”. Η βασική μονάδα μέτρησης του συστήματος αυτού ήταν το τετράεδρο, που σε συνδυασμό με οκτάεδρα, σχηματίζει τα πιο οικονομικά μέτρα γεμίσματος χώρου. Η αρχιτεκτονική συνέπεια της χρήσης της γεωμετρίας αυτής από τον Fuller ήταν ο γεωδαισιακός θόλος, ένα πλέγμα του οποίου η συνολική αντοχή αυξάνεται λογαριθμικά με το μέγεθός του. Χιλιάδες τέτοιοι θόλοι έχουν κατασκευαστεί σε όλο τον κόσμο, με τον πλέον διαφημισμένο το Θόλο στην EXPO 67 στο Montreal. [Β-Β]

ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Εκτός από τα κανονικά πολύεδρα, που είναι κυρτά και συνεχή υπάρχουν και άλλα πολύεδρα τα οποία είτε είναι ημι – κανονικά είτε δεν είναι κανονικά.

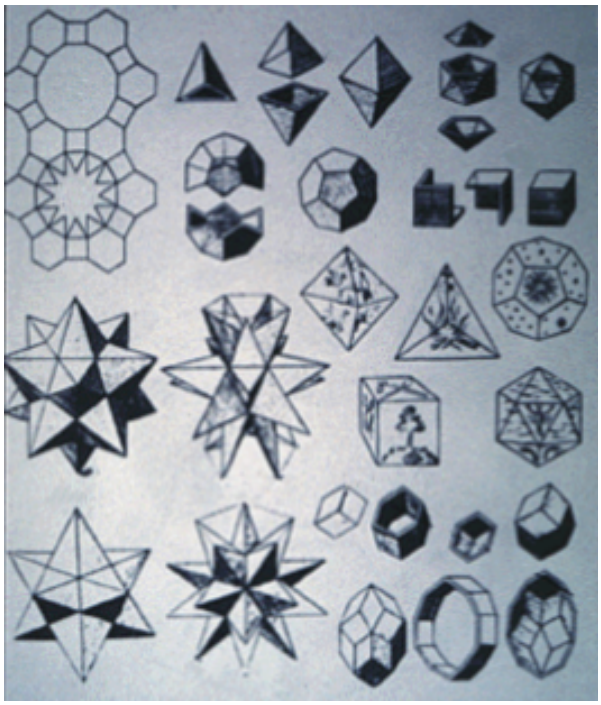
ΑΣΤΕΡΕΣ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Τα μη κανονικά πολύεδρα μπορούν να κατασκευαστούν από τα πέντε κανονικά, επεκτείνοντας τις έδρες τους μέχρι να σχηματίσουν ένα αστέρι. Γι΄ αυτό καλούνται Αστέρες πολύεδρα. Δύο τέτοια πολύεδρα ανακαλύφθηκαν από τον Poinsot το 1809. Τα υπόλοιπα τα είχε βρει 200 χρόνια πριν ο Kepler. Στην εικόνα [ΦΠ2] φαίνονται τα 4 πολύεδρα του Kepler.

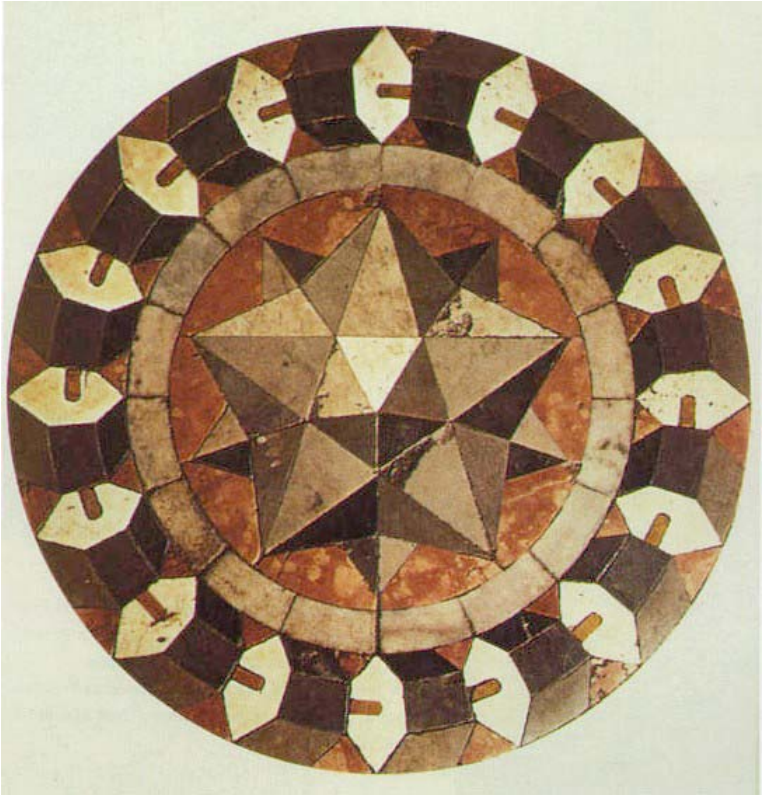


Υπάρχει ένα ακόμη ψευδο- αστέρας – πολύεδρο που συντίθεται από δύο τετράεδρα που η κορυφή του ενός εισχωρεί από το κέντρο της έδρας του άλλου. Τα δύο τετράεδρα σχηματίζουν έναν οκταεδρικό κοινό πυρήνα. Το στερεό αυτό λέγεται Stella Octangula του Kepler και είναι τρισδιάστατο αντίστοιχο του Αστέρα του Δαυίδ του επιπέδου, που είδαμε στην εισαγωγή.

Στην παρακάτω φωτογραφία [ΦΠ3], φαίνεται το χαρακτικό από την πραγματεία του Kepler *Harmonices Mundi*, του 1619, όπου είναι σχεδιασμένα, εκτός των τεσσάρων παραπάνω αστέρων και τα πλατωνικά στερεά με διακόσμηση τέτοια ώστε να αντιστοιχούν ακριβώς στα τέσσερα στοιχεία και στον κόσμο του Τίμαιου.



Αξίζει να αναφέρουμε ότι το μικρό δωδεκάεδρο αστέρας εμφανίζεται, πολύ πριν του Kepler, στο μωσαϊκό της Βασιλικής του Αγίου Μάρκου στην Βενετία, έργο που αποδίδεται στον Paolo Uccello (1397-1475) που ήταν ένας Φλωρεντινός ζωγράφος και τεχνίτης μωσαϊκών που βοήθησε στην διερεύνηση της προοπτικής στην πρώιμη Αναγεννησιακή τέχνη. Το μωσαϊκό αυτό φαίνεται στην φωτογραφία.



ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΣΤΕΡΕΑ

Ένας άλλος τρόπος να δημιουργήσουμε μη κανονικά στερεά είναι κόβοντας τις γωνίες των πλατωνικών στερεών. Προκύπτουν έτσι δεκατρία ημι-κανονικά στερεά, τα οποία επίσης εγγράφονται σε σφαίρα, και έχουν έδρες δύο ή τρία διαφορετικά είδη κανονικών πολυγώνων (τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα, εξάγωνα, οκτάγωνα ή δεκάγωνα). Ο Αρχιμήδης μελέτησε τα δεκατρία αυτά ημι-κανονικά πολύεδρα και γι' αυτό φέρουν το όνομά του.

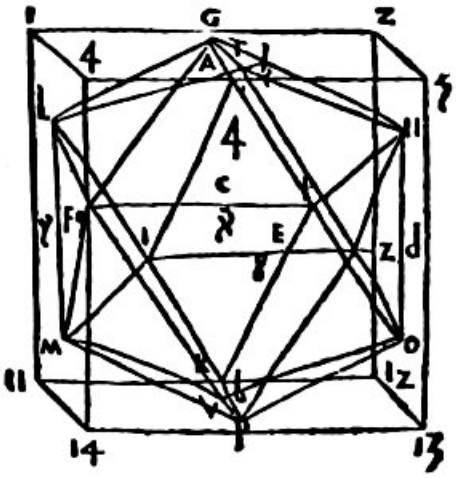
Τα λεπτομερή χαρακτηριστικά τους είναι [Β-4]:

ΗΜΙΚΑΝΟΝΙΚΑ ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΣΤΕΡΕΑ		
Αριθμός Κορυφών	**Ακμές / ανά κορυφή**	**Πλήθος & είδος εδρών**
12	18 / 3	4 εξάγωνα, 4 τρίγωνα
12	24 / 4	6 τετράγωνα, 8 τρίγωνα

30	60 / 4	12 πεντάγωνα, 20 τρίγωνα
24	36 / 3	8 εξάγωνα, 6 τετράγωνα
24	36 / 3	6 οκτάγωνα, 8 τρίγωνα
60	90 / 3	20 εξάγωνα, 12 πεντάγωνα
60	90 / 3	12 δεκάγωνα, 20 τρίγωνα
24	48 / 4	18 τετράγωνα, 8 τρίγωνα
60	120 / 4	12 πεντάγωνα, 30 τετράγωνα και 20 τρίγωνα
48	72 / 3	6 οκτάγωνα, 8 εξάγωνα και 12 τετράγωνα
120	180 / 3	12 δεκάγωνα, 20 εξάγωνα και 30 τετράγωνα
24	60 / 5	6 τετράγωνα, 32 τρίγωνα
60	150 / 5	12 πεντάγωνα, 80 τρίγωνα

Η εξίσωση του Euler $v + f = s + 2$ ισχύει και στην περίπτωση των κορυφών, των εδρών και των ακμών των δεκατριών Αρχιμήδειων στερεών.

Στην Αναγέννηση οι μεγάλοι καλλιτέχνες – Γεωμέτρες ενδιαφερόντουσαν για αυτά, όπως και για τα πέντε κανονικά πλατωνικά στερεά αλλά και τα πολύεδρα-αστέρες. Στα 1492 ο Pier Della Francesca αφιέρωσε την πραγματεία του De Quinque Corporibus στον Δούκα του Urbino. Ο Pierro ήταν εκείνος που επανακάλυψε τα πέντε Αρχιμήδεια στερεά που παράγονται από τα πλατωνικά. Επιπλέον, ανακάλυψε τη μόνη ιδιότητα των πλατωνικών στερεών που δεν αναφέρει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του, ότι το εικοσάεδρο εγγράφεται στον κύβο [Βι-2] και στην ουσία έδωσε την εκκίνηση για την μελέτη των πολύεδρων κανονικών και μη. Η εικόνα προέρχεται από τον Paccioli που οικειοποιήθηκε τα γραπτά του Pierro. [Bi-2]

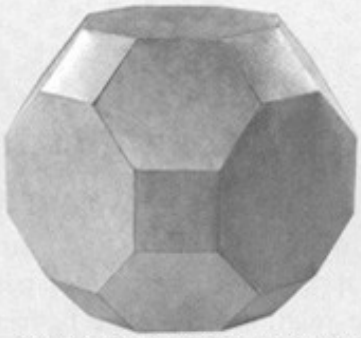


Ο Luca Paccioli στη δική του πραγματεία Divina Proportione μελετά εκτός από τα πλατωνικά στερεά και μερικά Αρχιμήδεια στερεά, ιδιαίτερα το κυβοκτάεδρο και το Πολύεδρο του Kelvin *("il corpo de 14, cive 6 quadrate, 8 exagone*"), όπως επίσης και τα πολύεδρα αστέρες. Τα σχέδια, πάνω από 60, για το βιβλίο τα έφτιαξε ο Leonardo και περιλαμβάνονταν τα Πλατωνικά στερεά, έξι Αρχιμήδεια με την πρώτη αναπαράσταση του εικοσιδωδεκάεδρου και του ρομβο κυβοκτάεδρου του οποίο φαίνεται, όμως, και στην προσωπογραφία του Paccioli που είδαμε στην εισαγωγή, 1^{ο} κεφάλαιο. Με τα πολύεδρα ασχολείται και ο Durer στην Treatise on Proportions [Πραγματεία Περί Αναλογιών]. Αλλά από όλους τους συγγραφείς της Αναγέννησης, αυτός που έδειξε μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα Αρχιμήδεια στερεά ήταν ο πασίγνωστος Daniel Barbaro, Βενετός διπλωμάτης. Στο έργο του Prattica de la Perspectiva (Βενετία, 1569), τα προσδιορίζει όλα με την μέθοδο της αποκοπής γωνιών ή ακμών των παραγόντων πολύεδρων. Τα αναπτύσσει στο επίπεδο μιας από τις έδρες τους, συνθέτει συναρπαστικά αστέρια–πολύεδρα θέτοντας κανονικές πυραμίδες στις έδρες τους, και παίρνει ξανά τα mazzochio του Paolo Uccelo (Mazzocchio: Καπέλο στην μορφή πολυεδρικού τόρου, στην εικόνα –λεπτομέρεια τοιχογραφίας του 1448 του Uccelo - φαίνεται γυναίκα να φορά ένα)

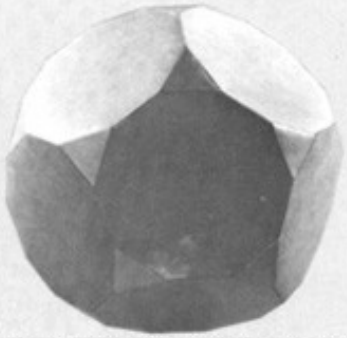
εγγράφοντας κανονικά πολύγωνα σε τόρους, δηλαδή στερεούς δακτυλίους με κυκλική τομή, και επίσης τα μελετά με πυραμίδες. [B-4, σελ 58]. Η συνεισφορά του Kepler στα Αρχιμήδεια ήταν μεγάλη, γιατί αυτός απέδειξε ότι υπάρχουν μόνο δεκατρία. [Bi-2]

Στην επόμενη φωτογραφία [Bi-1] φαίνονται και τα 13 Αρχιμήδεια στερεά.

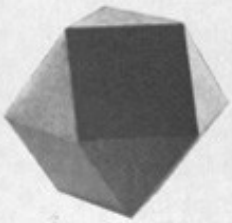
ΚΟΛΟΥΡΟ
ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ



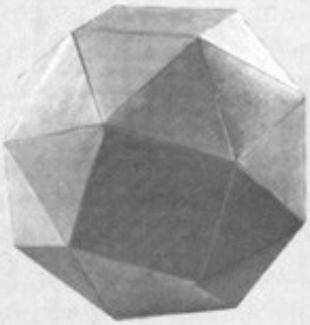
ΜΕΓΑ ΡΟΜΒΟΚΥΒΟΚΤΑΕΔΡΟ



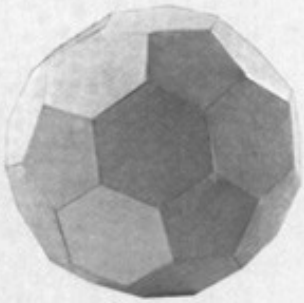
ΚΟΛΟΥΡΟ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ



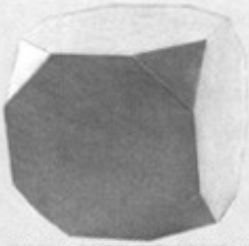
ΚΥΒΟΚΤΑΕΔΡΟ



SNUB ΚΥΒΟΣ



ΚΟΛΟΥΡΟ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ



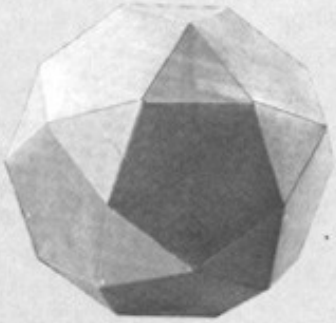
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΥΒΟΣ

ΚΟΛΟΥΡΟ
ΟΚΤΑΕΔΡΟ

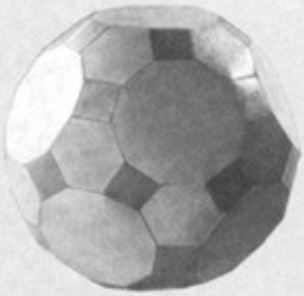
SNUB ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ

ΡΟΜΒΟΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ

ΡΟΜΒΟ ΚΥΒΟΚΤΑΕΔΡΟ



ΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ



ΜΕΓΑ
ΡΟΜΒΟΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ

ΤΑ ΔΕΚΑΤΡΙΑ
ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΣΤΕΡΕΑ

Στα παραπάνω στερεά πρέπει να προσθέσουμε και δύο άπειρες σειρές από εξίσου ημικανονικά εγγράψιμα πολύεδρα: 1) Τα κανονικά ορθογώνια πρίσματα τα οποία εγγράφονται σε σφαίρα (δύο κανονικά πανομοιότυπα παράλληλα πολύγωνα με n πλευρές που συνδέονται με n τετράγωνα) 2) Τα κανονικά αντιπρίσματα, δηλαδή δυο κανονικά ίδια πολύγωνα που το ένα έχει περιστραφεί κατά γωνία $\frac{360°}{2n}$ σε σχέση με το άλλο, και ενώνονται με 2n ισόπλευρα τρίγωνα.

Τα κανονικά πρίσματα και αντιπρίσματα είναι εξίσου εγγράψιμα σε σφαίρα και έχουν όλες τις ιδιότητες των Αρχιμήδειων στερεών (σε κάθε ένα οι στερεές γωνίες που ξεκινούν από τις κορυφές είναι ίδιες). Οι λεπτομέρειες τους είναι οι ακόλουθες:

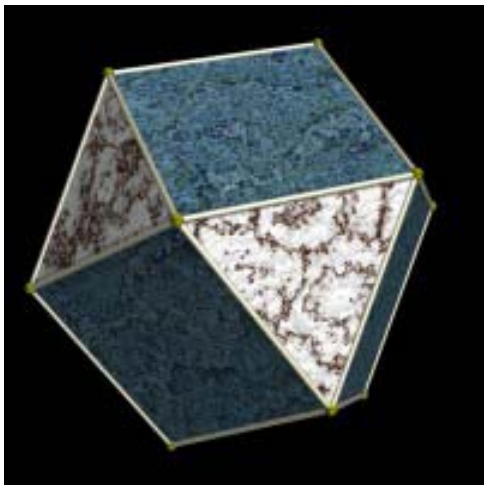
	Κορυφές v	**Ακμές s**	**Έδρες f**
Πρίσματα	2n	3n	n+2
Αντιπρίσματα	2n	4n	2(n+1)

Η εξίσωση του Euler ισχύει και σε αυτά.

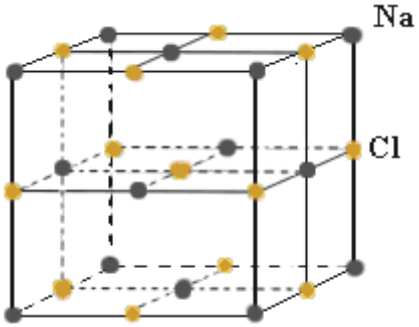
ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΑ ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥΣ

Σύμφωνα με την Ghyka [B-4] τα σημαντικότερα Αρχιμήδεια πολύεδρα είναι:

1) Το κυβοκτάεδρο, που έχει 14 έδρες (8 ισόπλευρα τρίγωνα και 6 τετράγωνα), 24 ακμές και 12 κορυφές (σχήμα).



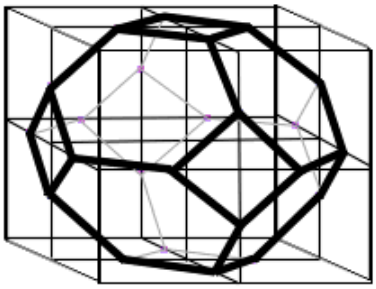
Το κυβοκτάεδρο έχει την ακμή του ΑΒ ίση με την ακτίνα ΟΑ της περιγεγραμμένης σφαίρας, ιδιότητα ανάλογη της ιδιότητας του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου στο επίπεδο. Έχει ακόμη δύο αξιοσημείωτες ιδιότητες που συνδέονται με ιδεώδεις διαμερίσεις του χώρου και παίζει ρόλο στην *κρυσταλλογραφία*. Στο σχήμα,



αναπαρίσταται ένας κρύσταλλος άλατος, χλωριούχου νατρίου (**NaCl**), με τα άτομα του χλωρίου να συμπίπτουν με τις κορυφές και το κέντρο ενός κυβοκτάεδρου, ενώ τα άτομα του νατρίου να συμπίπτουν με τις κορυφές και τα κέντρα των εδρών του κύβου από τον οποίο μπορεί να παραχθεί το κυβοκτάεδρο παίρνοντας τα μέσα όλων των ακμών και συνδέοντας τα.

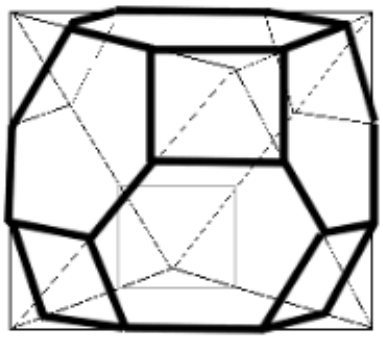
Το κυβοκτάεδρο μπορεί να δημιουργηθεί παίρνοντας τα μέσα όλων των πλευρών ενός οκτάεδρου. [Β-4] Συνεπώς έχεις τις ίδιες ποιοτικά συμμετρίες με το οκτάεδρο αλλά και τον κύβο, οπότε η ομάδα συμμετρίας του είναι η οκταεδρική. Σύμφωνα με την Ghyka [Β4, σελ 52] τα άτομα του άνθρακα στη συμπιεσμένη κρυσταλλική τους μορφή (διαμάντια), όπως και τα άτομα του χρυσού, του ασημιού, του χαλκού και του αλουμινίου είναι σε κανονική θερμοκρασία κατανεμημένα σε κυβοκταεδρικά πλέγματα. Το κυβοκτάεδρο, εξάλλου, είναι εξαιρετικής σημασίας για την αρχιτεκτονική, ειδικότερα για την στήριξη θόλου επί κυβικού σκελετού [Β-4].

2) Το κόλουρο Οκτάεδρο ή τετρακαιδεκάεδρο του Κέλβιν ή επταπαραλληλόεδρο του Fedorov (συμπτωματικά το κυβοκτάεδρο είναι ένα τετρακαιδεκάεδρο που έχει 14 έδρες) έχει 24 κορυφές, 36 ακμές, 14 έδρες από τις οποίες 8 είναι εξάγωνα και 6 είναι τετράγωνα. Η Ghyka αναφέρει ότι είναι το μόνο ανάμεσα στα δεκατρία Αρχιμήδεια στερεά που μπορεί να συμπληρώσει το χώρο με επανάληψη, δηλαδή να καλυφθεί όλος ο χώρος από το ίδιο στερεό σε πυκνή στοίχιση χωρίς κενά, ενώ από τα πέντε πλατωνικά στερεά μόνο ο κύβος έχει την ίδια ιδιότητα. Αυτό το πολύεδρο μπορεί να παραχθεί διαιρώντας κάθε ακμή ενός οκτάεδρου σε τρία ίσα μέρη και ενώνοντας τα σημεία που προκύπτουν, όπως στο σχήμα.



ΚΟΛΟΥΡΟ ΟΚΤΑΕΔΡΟ
ή τετρακαιδεκάεδρο του Kelvin

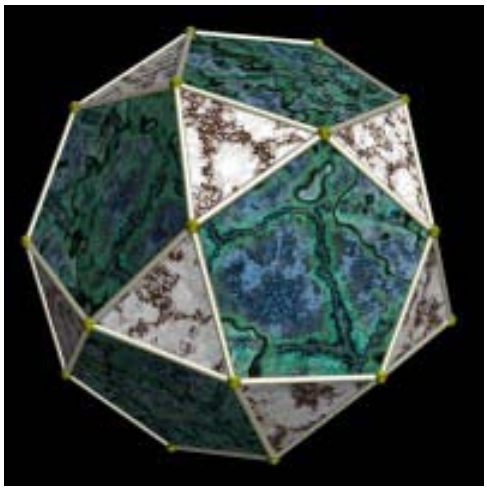
Επομένως, το κόλουρο οκτάεδρο έχει και αυτό την ίδια ομάδα συμμετρίας με τον κύβο και το οκτάεδρο, την οκταεδρική με 48 συμμετρίες. Τέλος, μπορεί κανείς να κατασκευάσει το κόλουρο οκτάεδρο ξεκινώντας από 8 συνενωμένους κύβους, που δημιουργούν ένα μεγάλο κύβο, διαιρώντας σε δύο ίσα μέρη κάθε μια από τις 4 ακμές των μικρών κύβων που συναντώνται στο κέντρο κάθε έδρας του μεγάλου κύβου και ενώνοντας μεταξύ τους τα σημεία που προκύπτουν όπως στο σχήμα .



Κόλουρο Οκτάεδρο

3) Το τριακοντάγωνο ή τριακοντάεδρο ή εικοσιδωδεκάεδρο που έχει 30 κορυφές, 60 πλευρές, 32 έδρες από τις οποίες 12 είναι πεντάγωνα και 20 τρίγωνα. Αυτό το πολύεδρο μπορεί να κατασκευασθεί ενώνοντας τα μέσα των ακμών είτε του δωδεκάεδρου είτε του εικοσάεδρου. Συνεπώς το

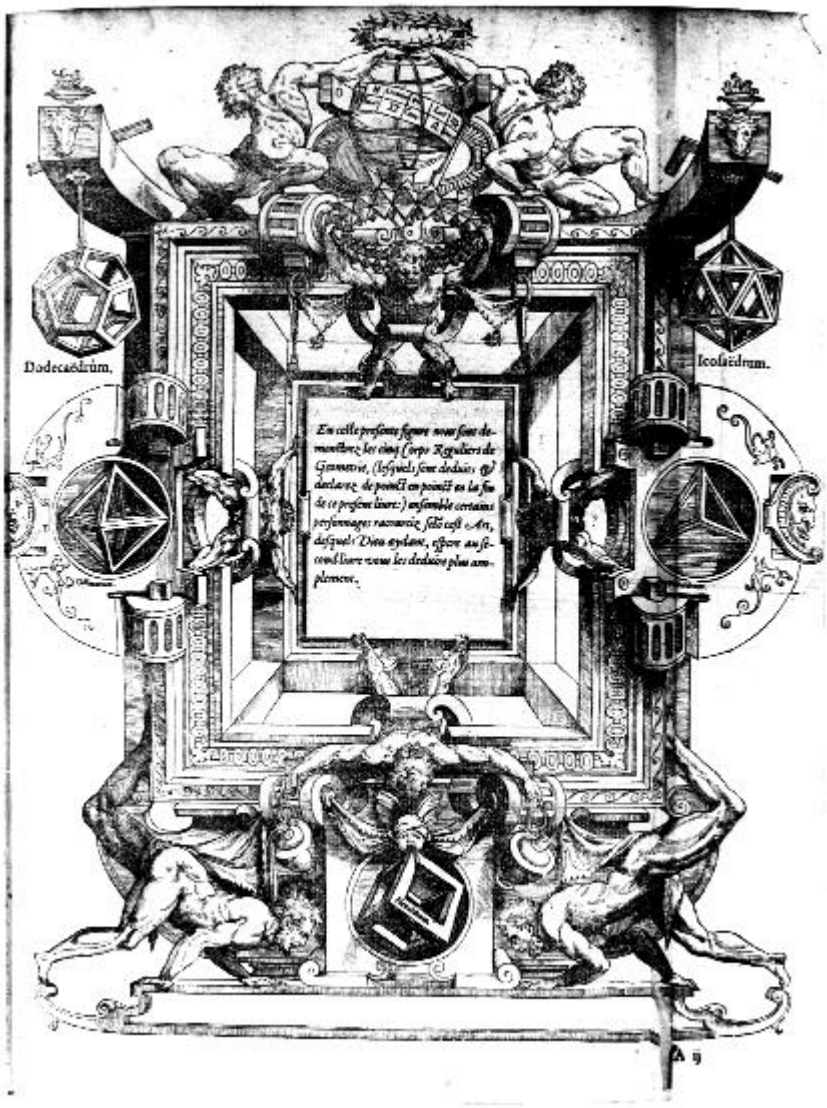
εικοσιδωδεκάεδρο έχει τις ίδιες συμμετρίες με αυτά, άρα και την ίδια ομάδα συμμετρίας, την εικοσαεδρική. Οι 30 κορυφές του συμπίπτουν με τις ακμές των 6 δεκαγώνων που παράγονται από τις τομές 6 μεγίστων



κύκλων που είναι συμμετρικά τοποθετημένοι σε μια σφαίρα. Το εικοσιδωδεκάεδρο, φωτογραφία, είναι στην πραγματικότητα η επέκταση της προβολής του δεκαγώνου στον τρισδιάστατο χώρο. Επίσης, είναι στενά συνδεδεμένο με την χρυσή τομή: ο λόγος μεταξύ της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρας και της ακμής του τριακοντάεδρου είναι $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ΕΞΟΔΟΣ – ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΗ

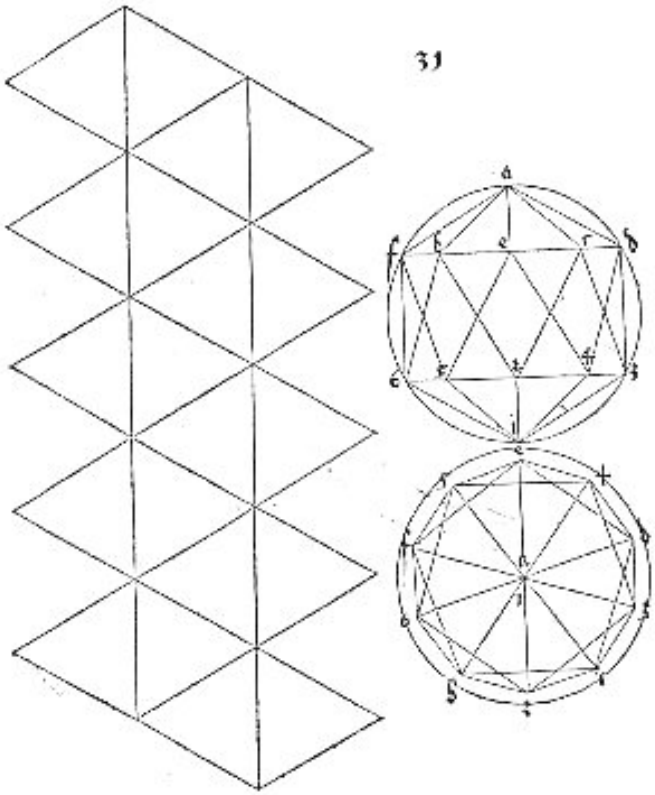
Στην Γαλλία, βρίσκουμε αυτό το εξώφυλλο από την πραγματεία του Jean Cousin *Livre de Perspective*



του 1560.

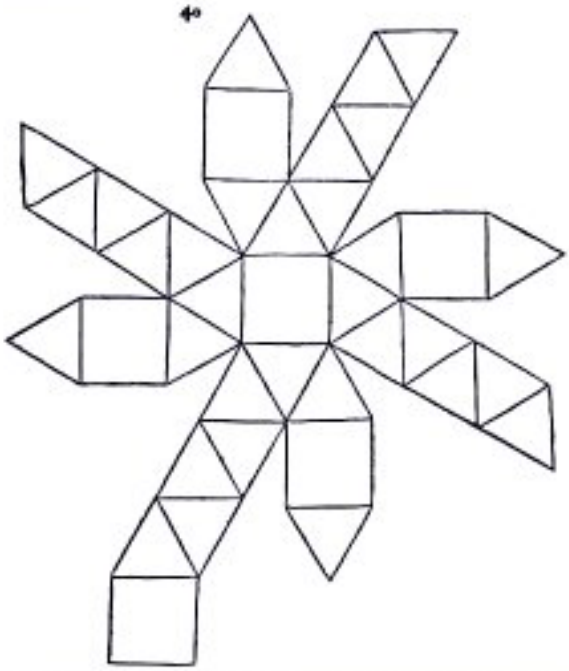
Διακρίνονται και τα πέντε πλατωνικά στερεά [Bi-2]

Αναφέραμε πριν ότι ο Durer (1471-1528), συνεισέφερε στα πολύεδρα.με το βιβλίο του 1525 *Underweysung der Messung, που στα Αγγλικά έχει* μεταφραστεί σαν *Painter's Manual*. Στο βιβλίο αυτό συναντάμε για πρώτη φορά πολυεδρικά δίχτυα, δηλαδή επίπεδα σχήματα που είναι ξεδιπλωμένα για εκτύπωση. Στις παρακάτω φωτογραφίες [Bi-2] είναι τα σχέδια για ένα εικοσάεδρο αλλά και για ένα από τα δεκατρία αρχιμήδεια στερεά, το snub κύβο.



Das Sechst corpus so das außhan wirt, hat es sechs gesicht, vnd zwey vnd dreyßig Dreyecklichte seiten: so man das zusamen legt, gewint es vier vnd zwenzig eck, vnd sechzig scharpfe spitzen.

40



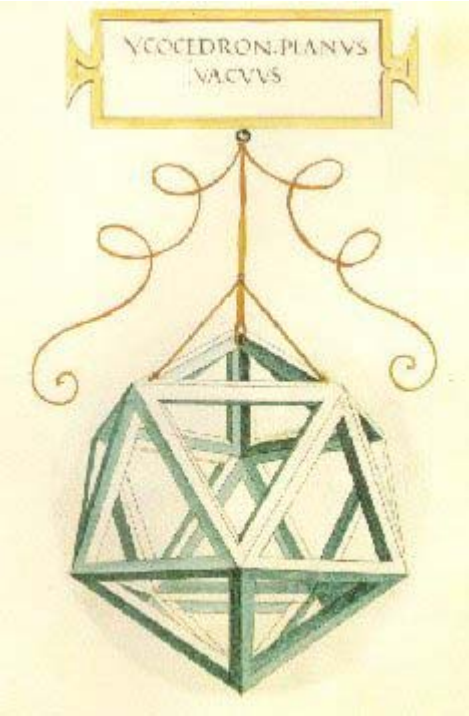
Das Siebent vnd nach folget corpus so es offen legt, hat es sechs achte eckenn vnd acht sechs eckenn, vnd zwey vnd vier eckenn seiten: vnd so man das zusamen legt, so gewint es achte vnd vierzig eck, vnd zwey vnd siebenzig scharpfe spitzen.

Πολύεδρα εμφανίζονται και σε πίνακες του Dórer, όπως ο παρακάτω που είναι γνωστός ως Melancholia I

Διάφορες ερμηνείες έχουν δοθεί για το ασυνήθιστο πολύεδρο που φαίνεται, ένα κόλουρο ρομβοειδές (Panofski), από απλές γεωμετρικές εξηγήσεις σχετικά με την εγγραφή του σε σφαίρα μέχρι ψυχολογικές, όπου ο κύβος συμβολίζει την αρρενωπότητα και η αποκοπή των γωνιών κάποια φροϋδική σημασία [Bi-2].

Ο πιο σημαντικός ίσως καλλιτέχνης της Αναγέννησης που ασχολήθηκε με τα πολύεδρα ήταν ο Leonardo Da Vinci. Έχουμε ήδη αναφέρει την συνεισφορά του τόσο με τα σχέδια για το βιβλίο του Paccioli, όσο και σε ξεχωριστά δικά

σχέδια πολύεδρων. Ειδικότερα η τεχνοτροπία αναπαράστασης πολύεδρων που πρώτος χρησιμοποίησε, απεικονίζοντας τα στέρεα και κοίλα, σαν ξύλινα μοντέλα (που πιθανόν να έφτιαξε για αυτό το λόγο ο Paccioli) ώστε να φαίνονται και οι «πίσω» ακμές, επηρέασε καθοριστικά όσους μεταγενέστερους ασχολήθηκαν με τα πολύεδρα στην ζωγραφική ή κάποιο άλλο είδος τέχνης. Παρακάτω βλέπουμε μερικά από τα σχέδια του Leonardo.

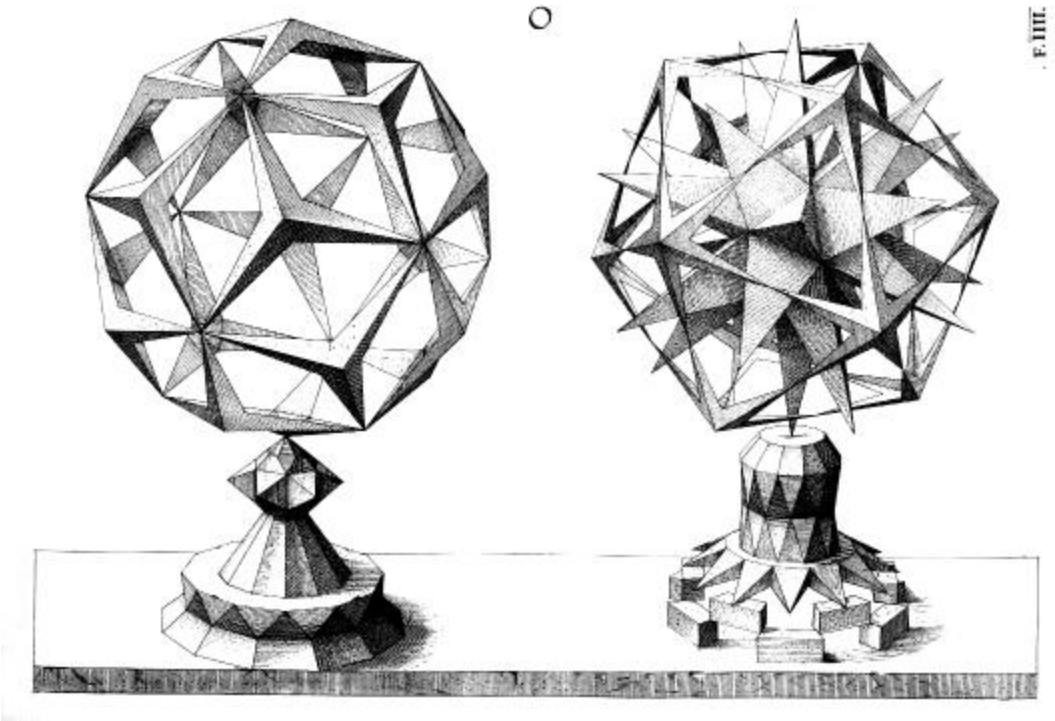


ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ

ΚΟΛΟΥΡΟ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ

Ακόμη ένα σχέδιο από το ίδιο βιβλίο αναπαριστά την 72εδρη σφαίρα, πολύ «δημοφιλές» πολύεδρο, που είναι επίσης η βάση για κατασκευή αρχιτεκτονικών θόλων.

Ένας άλλος καλλιτέχνης που ασχολήθηκε με τα πολύεδρα ήταν ο Wentzel Jamnitzer (1508-1585) που το βιβλίο του 1568 *Perspectiva Corporum Regularium* είναι πραγματικό αριστούργημα γεωμετρικών σχεδίων. [Bi-2] Ένα δείγμα αυτών βλέπουμε στην φωτογραφία που εικονίζεται



ένα ρομβικό τριακοντάεδρο (αριστερά) ενώ ο πυρήνας του δεξιού σχεδίου είναι το μικρό δωδεκάεδρο αστέρας [Bi-2].

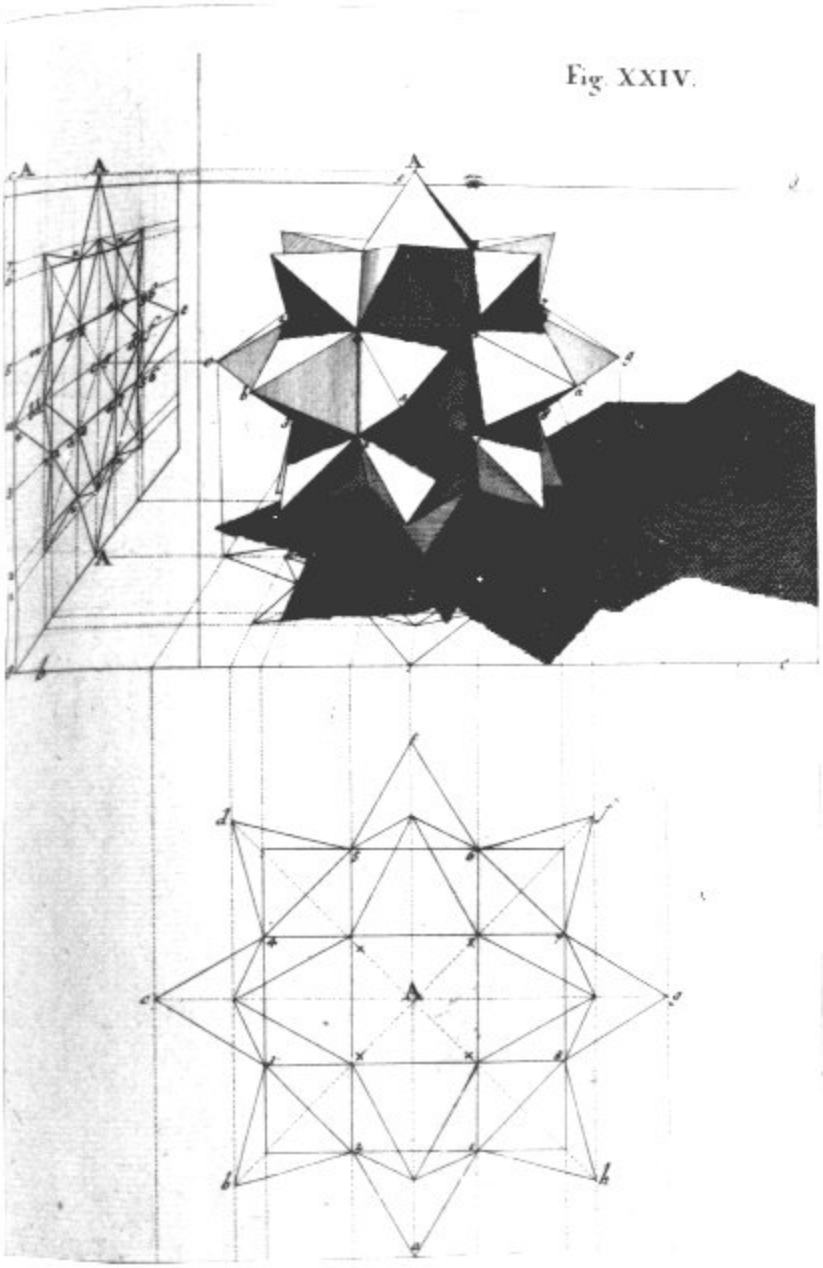
Ένα δημοφιλές είδος τέχνης στον μεσαίωνα και την Αναγέννηση ήταν τα Intarsia, τα οποία ήταν μωσαϊκά φτιαγμένα με κομματάκια από ξύλο. Στην παρακάτω φωτογραφία φαίνεται ένα δείγμα τέτοιου μωσαϊκού φτιαγμένο γύρω στα 1520 από τον by Fra Giovanni da Verona στην εκκλησία Santa Maria στο Organo, της Verona [Bi-2]. Φαίνονται από πάνω προς τα κάτω: μια σφαίρα με 72 πλευρές, ένα εικοσάεδρο, και ένα κόλουρο εικοσάεδρο. Παρατηρούμε ότι όλα είναι επηρεασμένα από την τεχνοτροπία του Leonardo.

Τα μωσαϊκά αυτά εξαλείφθηκαν σταδιακά ως μορφή τέχνης.

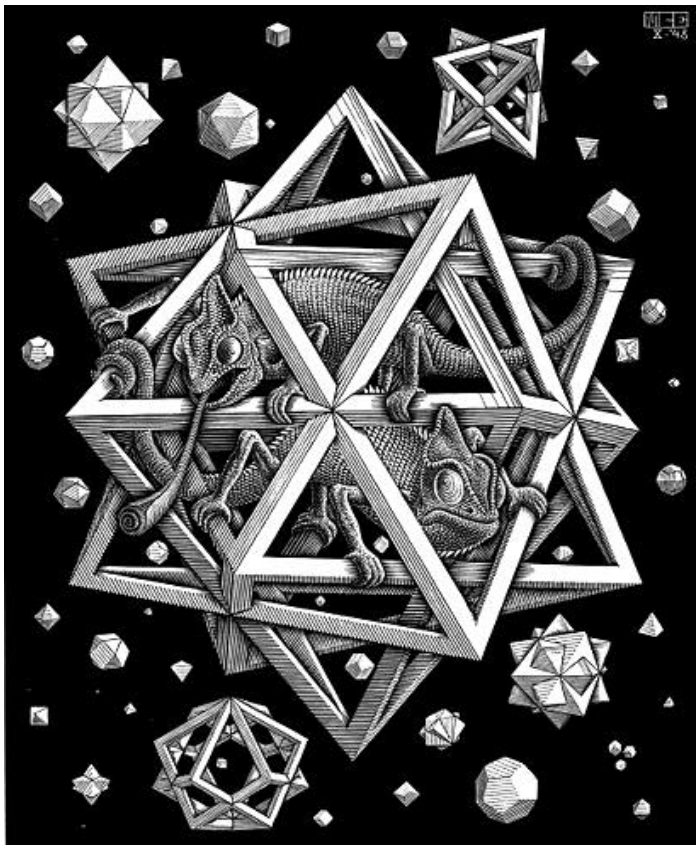
Παρακάτω στο φανταστικό ανάγλυφο [Bi-2] από την πραγματεία του Lorenz Stoer, *Geometria et Perspectiva* (1567) φαίνονται το κανονικό τετράεδρο και το εικοσάεδρο:

Στην Αγγλία, στον Καθεδρικό του Salisbury, βρίσκεται τύμβος του 1635 που περιλαμβάνει διάφορα στερεά πολύεδρα με τη μορφή των στερεών περιγραμμάτων που καθιέρωσε ο Leonardo

Στην πραγματεία του Paul Heinecken *Lucidum Prospectivae Speculum* (1727), υπάρχει ένα σχέδιο με προοπτική του ρομβο κυβοκτάεδρου με πυραμίδες σε κάθε του έδρα και επιπλέον τις σκιές τους [Bi-2]:



Στο παρακάτω χαρακτικό του 1948, ο M. Escher αποτυπώνει τρία οκτάεδρα συντιθέμενα, τη σύνθεση δύο κύβων και την Stella Octangula του Kepler, όλα σε διπλές εμφανίσεις τόσων σε «γεμάτη» μορφή όσο και στο στυλ του Leonardo.



Τέλος στους Καταρράκτες (1961) έχουμε την εμφάνιση τόσων κύβων που συντίθενται όσο και ρομβο δωδεκάεδρο αστέρα.