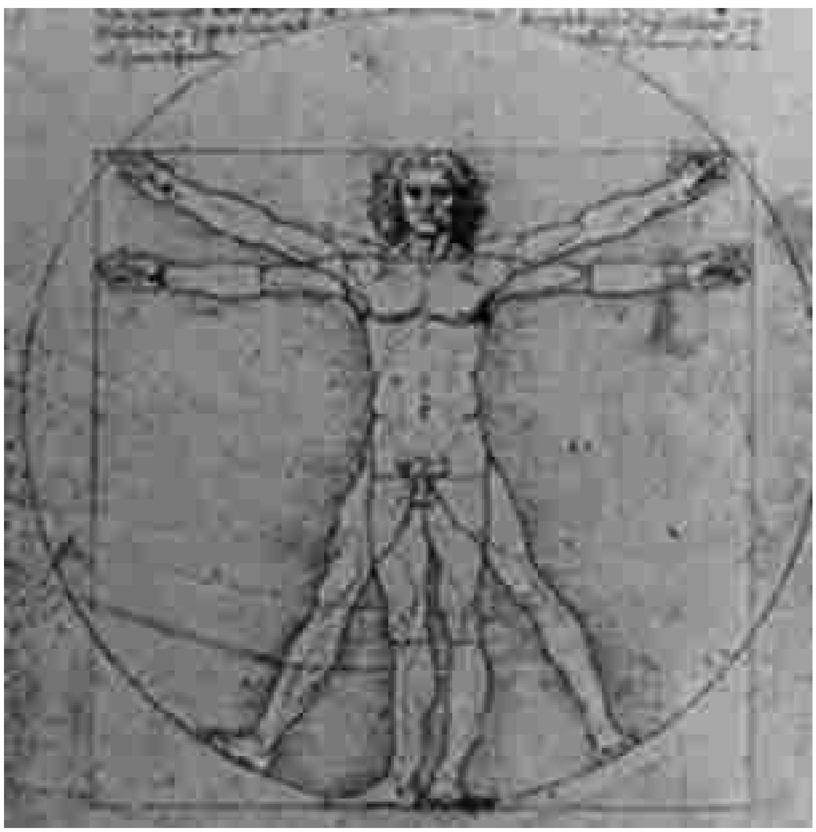
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΙΜΑΙΟ ΩΣ ΤΟΝ FELIX KLEIN ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ERLANGEN

2. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

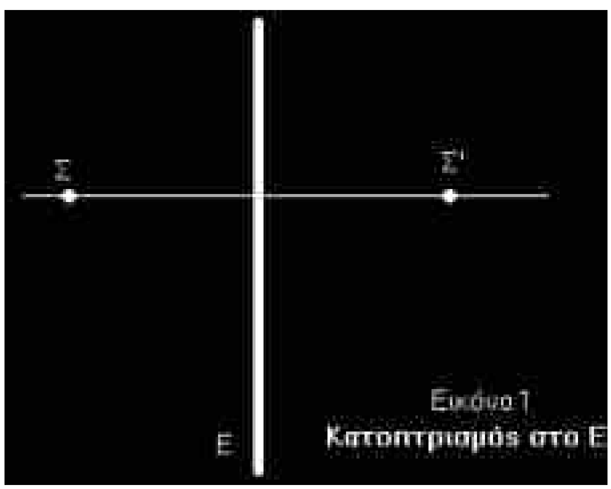
Ξεκινώντας από την κάπως αόριστη αντίληψη της συμμετρίας σαν "αρμονία των αναλογιών", σε αυτό το κεφάλαιο θα αποπειραθούμε να παρουσιάσουμε τη γεωμετρική έννοια της συμμετρίας στις διάφορες μορφές που εμφανίζεται, όπως είναι η αμφίπλευρη, η κεντρική, η περιστροφική, η διακοσμητική, η κρυσταλλογραφική κτλ. Στην ουσία θέλουμε να δείξουμε το τεράστιο πεδίο εφαρμογών της συμμετρίας στην τέχνη και στην φύση, και σε αυτό θα βοηθηθούμε από διάφορες εικόνες γραφήματα και φωτογραφίες. Ακόμη μας ενδιαφέρει η μαθηματική και φιλοσοφική σημασία της. Σκοπός είναι η βαθύτερη κατανόηση της συμμετρίας και επιπλέον η σκιαγράφηση της γενικής ιδέας που αποτελεί τη βάση όλων αυτών των ειδικών μορφών της: το αμετάβλητο ενός σχηματισμού στοιχείων ως προς μια ομάδα μετασχηματισμών. [Β-1].

Για αρχή, ας παραθέσουμε τι υπάρχει στο λήμμα συμμετρία σε μια εγκυκλοπαίδεια: ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, από την αρχαία ελληνική λέξη σύμμετρος, συν + μέτρον = με μέτρο, με κανόνα, με υπολογισμό, με μέτρηση (1541): 1) ισορροπημένες αναλογίες, ακόμη ομορφιά στη φόρμα που προκαλείται από τις ισορροπημένες αναλογίες. 2) η ιδιότητα του να είναι συμμετρικό. Ακριβής αντιστοιχία στο μέγεθος, το σχήμα και τη σχετική θέση των μερών στις αντίθετες πλευρές μιας διαχωριστικής γραμμής ή ενδιάμεσου επιπέδου ή γύρω από ένα κέντρο ή άξονα. 3) μια αυστηρή κίνηση μιας γεωμετρικής μορφής που ορίζει μια ένα προς ένα αντιστοιχία στον εαυτό της 4) η ιδιότητα να παραμένει απαράλλαχτο κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς όπως ο προσανατολισμός του χώρου, το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου ή της κατεύθυνσης του βέλους του χρόνου. - χρησιμοποιείται για φυσικά φαινόμενα και εξισώσεις που τα περιγράφουν. [B-B] Όπως παρατηρούμε, δίνονται τέσσερις εξηγήσεις της συμμετρίας. Στην πρώτη, η συμμετρία συνδέεται με την ομορφιά μέσω της ισορροπίας των αναλογιών. Είναι, όπως είδαμε στην εισαγωγή, η πρώτη σημασία που της αποδίδει ο Weyl στο βιβλίο του και είναι λίγο πολύ η ιδέα που έχουμε όλοι μας για αυτήν. Αν και δεν εμφανίζονται μαθηματικά ή αριθμοί, ακόμη και αυτός ο ορισμός χρησιμοποιεί μια μαθηματική έννοια.: την αναλογία. Στην εισαγωγή είδαμε ότι διάφοροι καλλιτέχνες τόσο της αρχαιότητας όσο και της Αναγέννησης προσπάθησαν και πέτυχαν να αναπαράγουν την ανθρώπινη ομορφιά χρησιμοποιώντας αυστηρούς υπολογισμούς και μετρήσεις, δηλαδή χρησιμοποιώντας τη συμμετρία. Στην ουσία αυτό που προκύπτει συνήθως είναι μια ιδεατή αψεγάδιαστη μορφή. Μερικοί κατέγραψαν τις απόψεις τους σε βιβλία, όπως ο Πολύκλειτος στο Κανόνα του και ο Durer,στα Βιβλία των ανθρώπινων αναλογιών. Η ανθρώπινη ομορφιά βασίζεται ακριβώς στην ιδέα της κανονικής σε αμοιβαία αντιστοιχία διευθέτησης των επιμέρους τμημάτων του σώματος με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας αναλογικά ισορροπημένης μορφής. [B-E]. Σε αυτόν τον πρώτο ορισμό η ομορφιά συναρτάται με τη συμμετρία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ο Βιτρουβιανός άνθρωπος του DaVinci:

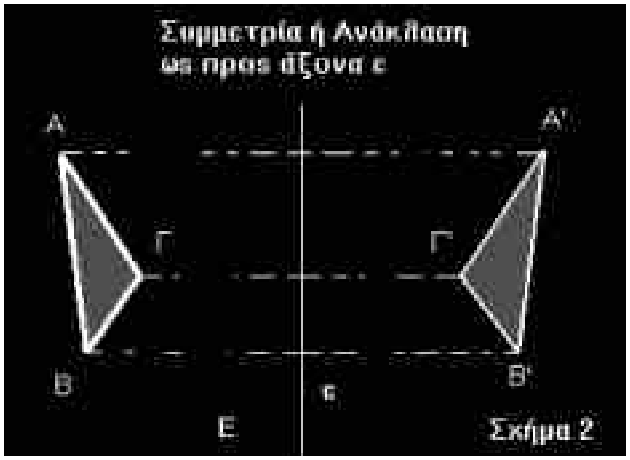


ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του ανθρώπου, το είδος της συμμετρίας που εμφανίζεται είναι κατά προσέγγιση η αμφίπλευρη, δηλαδή η συμμετρία στην οποία παρόμοια ανατομικά μέρη είναι διευθετημένα σε αντίθετες πλευρές ενός ενδιάμεσου άξονα, έτσι ώστε μόνο ένα επίπεδο ή ευθεία να μπορεί να διαιρεί το όλο σε δύο ουσιαστικά ίδια μισά. [B-B]. Αφού το ανθρώπινο σώμα είναι αμφίπλευρα συμμετρικό, κάθε αμφίπλευρα συμμετρικό σώμα θα έχει την ίδια θεμελιώδη και καταφανή ιδιότητα (που συνήθως δεν της δίνουμε σημασία) του ανθρώπινου σώματος: να έχει τα επιμέρους τμήματα του κατανεμημένα ομοιόμορφα γύρω από ένα κάθετο ενδιάμεσο άξονα, έτσι ώστε να χωρίζεται νοητά σε δύο όμοια μισά, που το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο με τη διαδικασία που λέγεται κατοπτρισμός ή ανάκλαση. Με λίγη σκέψη το συμπέρασμα επεκτείνεται σε όλα τα σπονδυλωτά ζώα. Συμπερασματικά, η αμφίπλευρη συμμετρία είναι μια διαδικασία ανάμεσα σε δύο σύνολα (τα σημειοσύνολα του αριστερού και το δεξιού μέρους του σώματος) και έχει και άλλα ονόματα, όπως κατοπτρισμός ή ανάκλαση. Στα μαθηματικά, όμως, μια τέτοια διαδικασία δεν είναι τίποτε άλλο από μια συνάρτηση. Συγκεκριμένα υπάρχει ο εξής ορισμός: Μια διαδικασία, έστω Μ, λέγεται μετασχηματισμός ή συνάρτηση ένα προς ένα και επί όταν σε κάθε σημείο ενός συνόλου, Ε, αντιστοιχίζει ένα και μόνο στοιχείο του ίδιου συνόλου και αντίστροφα, κάθε στοιχείο του συνόλου Ε είναι εικόνα μοναδικού στοιχείου του Ε δηλαδή έχει αντιστοιχηθεί με ένα και μόνον στοιχείο του ίδιου συνόλου. Γράφουμε Μ: Ε --> Ε Ειδικότερα, έστω ε μια ευθεία του επιπέδου Ε, και ο μετασχηματισμός για τον οποίο ισχύουν: Ι) για κάθε SεE είναι M(S)=S, δηλαδή τα σημεία του άξονα ε παραμένουν αναλλοίωτα κατά το μετασχηματισμό. ΙΙ) Αν S !ε Ε, τότε η εικόνα του S'=M(S) μέσω του μετασχηματισμού είναι το σημείο εκείνο του επιπέδου Ε που κάνει την ευθεία μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος. [B-7] Ο μετασχηματισμός Μ λέγεται συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία ε ή ανάκλαση ή κατοπτρισμός ως προς την ε και η ευθεία ε θα καλείται άξονας συμμετρίας του σχήματος.



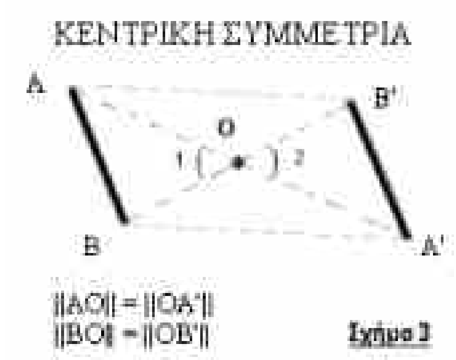
Έτσι όταν θα λέμε ανάκλαση ή κατοπτρισμό θα εννοούμε το ίδιο πράγμα με την αμφίπλευρη συμμετρία και αντίστροφα. Επιπλέον από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στην συμμετρία και τα διάφορα είδη της με όρους περισσότερο μαθηματικούς παρά διαισθητικούς ή περιγραφικούς όπως πριν. Σημασία έχει ότι ορίσαμε ένα είδος συμμετρίας, την αμφίπλευρη, μαθηματικά ως έναν μετασχηματισμό, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το ίδιο σύνολο, το επίπεδο Ε. Η αμφίπλευρη συμμετρία επεκτείνεται εύκολα στο χώρο: Θα είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση του Ευκλείδειου χώρου στον εαυτό του τέτοια ώστε τα σημεία ενός επιπέδου ε να μένουν αναλλοίωτα και κάθε άλλο σημείο Μ να απεικονίζεται σε ένα σημείο Μ' τέτοιο ώστε το ΜΜ' να είναι κάθετο στο ε.



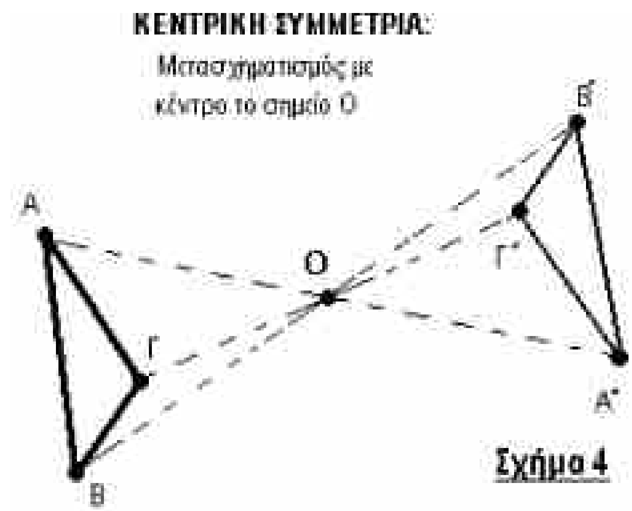
Αν ανατρέξουμε πάλι στον ορισμό της συμμετρίας από την εγκυκλοπαίδεια στην αρχή του κεφαλαίου θα δούμε ότι στην ουσία έχουμε ήδη καλύψει και την 3η εξήγηση της συμμετρίας: μια ένα προς ένα απεικόνιση μιας γεωμετρικής μορφής στον εαυτό της. Είμαστε επίσης σε θέση να μιλήσουμε και για την 4η εξήγηση που δίνεται. ως ιδιότητα να παραμένει απαράλλαχτο κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Γενικά οι μετασχηματισμοί που έχουν την συγκεκριμένη ιδιότητα να αφήνουν αναλλοίωτα τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων λέγονται ισομετρίες. Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Μ είναι ισομετρία όταν: αν Α, Β δύο τυχαία σημεία του Ε, και Α'=Μ(Α) , Β'=Μ(Β) οι εικόνες τους, τότε . Οι ισομετρίες τώρα εκτός από τις αποστάσεις αφήνουν αναλλοίωτες τις ευθείες γραμμές, τις γωνίες, την παραλληλία, την καθετότητα κ.α. Ένα παράδειγμα μετασχηματισμών που είναι ισομετρίες είναι και οι συμμετρίες. Αυτό διαισθητικά φαίνεται σωστό και εύκολα το αποδεικνύει κανείς. Το σχήμα 2 είναι μια οπτική αναπαράσταση του γεγονότος ότι η συμμετρία είναι μια ισομετρία. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με την εικόνα του Α'Β'Γ' μέσω του μετασχηματισμού, αφού ευθύγραμμα τμήματα απεικονίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα, και οι γωνίες και αποστάσεις σημείων μένουν απαράλλαχτες.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ Ή ΜΙΣΗ ΣΤΡΟΦΗ

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί μόνο με ένα από τα είδη της συμμετρίας, την αμφίπλευρη, που αν και είναι σχετικά το πιο συχνά εμφανιζόμενο εντούτοις δεν είναι το μοναδικό, αφού στη φύση παρατηρούνται και άλλα είδη όπως η κεντρική συμμετρία., η οποία αναφέρεται και στον εγκυκλοπαιδικό ορισμό ως αντιστοιχία στη σχετική θέση και το σχήμα των τμημάτων γύρω από ένα κέντρο ή έναν κεντρικό άξονα Η κεντρική συμμετρία, όπως όλα τα είδη της συμμετρίας, είναι ένας μετασχηματισμός του επιπέδου (ή του χώρου). Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της είναι ο εξής: Αν Ο ένα σημείο του επιπέδου, τότε ο μετασχηματισμός Μ: Ε --> Ε θα λέγεται κεντρική συμμετρία ως προς ένα σημείο Ο ή μισή στροφή, αν και μόνο αν: Ι) Αν Ρ=Ο τότε Μ(Ρ)=Ρ, δηλαδή το Ο είναι σταθερό κατά το μετασχηματισμό. II) Αν P!=O τότε M(P)=P', τέτοιο ώστε το O να είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος PP'. [B-7] Το σημείο O θα λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος.



Τα σχήματα 3 και 4 δείχνουν ακριβώς την κεντρική συμμετρία.



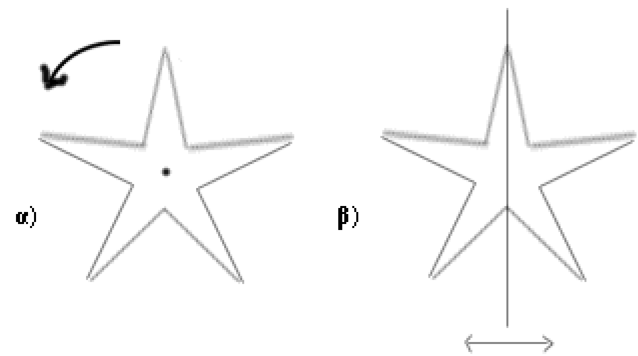
Η κεντρική συμμετρία είναι μια ισομετρία, αφού διατηρεί τις αποστάσεις όπως προκύπτει από το σχήμα 3: τα τρίγωνα AOB και A'OB' είναι ίσα αφού έχουν κατακορυφήν γωνίες ίσες και τις προσκείμενες πλευρές ίσες, συνεπώς το AB=A'B'. Εκτός από την αμφίπλευρη συμμετρία και τη κεντρική, άλλου είδους μετασχηματισμοί που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τις αποστάσεις των σημείων ίσες με τις αποστάσεις των εικόνων τους, δηλαδή είναι ισομετρίες, είναι η περιστροφές κατά γωνία και η παράλληλες μεταφορές κατά διάνυσμα α.

Στις τρεις διαστάσεις, μια στροφή κατά γωνία Θ περί έναν άξονα ε είναι ο μετασχηματισμός M: V --> V που σε κάθε σημείο A του χώρου, πλην των σημείων του άξονα ε που μένουν αναλλοίωτα, αντιστοιχίζει ένα μόνο σημείο A΄ τέτοιο ώστε η γωνία του αντίστοιχου επιπέδου να ισούται με θ , και επιπλέον |AO|=|OA'|. Στις δύο διαστάσεις, ο προηγούμενος ορισμός περιορίζεται στο επίπεδο στο οποίο είναι κάθετος ο άξονας ε, οπότε έχουμε ότι στροφή κατά γωνία Θ με κέντρο το σημείο O είναι ο μετασχηματισμός M: E->E, που σε κάθε σημείο A του επιπέδου, πλην του O που μένει πάντα σταθερή, απεικονίζει ένα μόνο στοιχείο Α΄ του επιπέδου, τέτοιο ώστε η γωνία ΑΟΑ'=Θ και |ΑΟ|=|ΟΑ΄| . Συμβολίζουμε την στροφή με R. Αν Θ=0, έχουμε μηδενική στροφή, δηλαδή την ταυτοτική συνάρτηση επί του Ε [B-7]. Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα a (ή ολίσθηση), λέγεται ο μετασχηματισμός Μ: Ε --> Ε του επιπέδου , που σε κάθε σημείο του Ε απεικονίζει ένα σημείο Α΄ τέτοιο ώστε το διάνυσμα ΑΑ' να είναι ισοδύναμο με το a, δηλαδή να έχει το ίδιο μήκος και να είναι παράλληλο με την ίδια φορά. Έτσι κάθε ολίσθηση του επιπέδου κινεί κάθε του σημείο κατά την ίδια απόσταση, την ίδια διεύθυνση και με την ίδια φορά. [B-7] Ένας άλλος ορισμός έχουμε ότι ο Μ : Ε --> Ε θα είναι μια παράλληλη μεταφορά αν το τετράπλευρο (Α, Μ(Α), Β, Μ(Β)) είναι παραλληλόγραμμο. [B-7] Οι ισομετρίες διατηρούν εκτός από τις αποστάσεις, τις ευθείες και τα μέτρα των γωνιών. Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει μια ισομετρία που να απεικονίζει τρία μη συνευθειακά σημεία σε τρία άλλα, αυτή είναι μοναδική. Βάσει αυτών μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε ισομετρία είναι ισοδύναμη με τη σύνθεση το πολύ τριών αξονικών συμμετριών. [B-7]

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μιλώντας για αμφίπλευρη και κεντρική συμμετρία μιλήσαμε για κίνηση. Μπορούμε να φανταζόμαστε τις συμμετρίες σαν κινήσεις. Για παράδειγμα, ένα σώμα θα είναι αμφίπλευρα συμμετρικό όταν ταυτίζεται με το κατοπτρικά συμμετρικό του, όταν δηλαδή παραμένει αμετάβλητο στην όψη μετά από κίνηση, τον μετασχηματισμό του κατοπτρισμού. Βέβαια αυτή η εξήγηση της συμμετρίας δεν συμπεριλαμβάνει πουθενά την αισθητική σημασία της. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει αφού ένα τρομερά άσχημο πράγμα μπορεί να είναι αμφίπλευρα συμμετρικό. Παρεμπιπτόντως κάθε σχήμα έχει τουλάχιστον μια τετριμμένη συμμετρία: αν δεν το μετακινήσουμε καθόλου παραμένει αμετάβλητο. Αυτήν τη συμμετρία θα λέμε ταυτοτική. Έτσι ένα αμφίπλευρα συμμετρικό σχήμα θα έχει δύο συμμετρίες: την ταυτοτική και την συμμετρία κατά την μετακίνηση του.

Ένα άλλο είδος συμμετρίας που εμφανίζεται συχνά στη φύση είναι η περιστροφική. Για να την κατανοήσει κανείς είναι καλύτερο να φέρουμε ένα παράδειγμα [B-5]. Ο ιδανικός πεντάποδος αστερίας της εικόνας έχει περιστροφική συμμετρία. Δηλαδή αν τον στρέψουμε γύρω από το κέντρο του κατά γωνία 360/5=72 μοιρών, το ένα πέμπτο μιας πλήρους στροφής, η σχετική του θέση δεν θα φαίνεται να έχει αλλάξει, δηλαδή δεν θα καταλάβουμε καμία διαφορά στη μορφή του πριν και μετά, αφού κάθε πόδι θα έχει πέσει στο επόμενο και τα κενά στα κενά. Αν αντίθετα τον περιστρέψουμε κατά γωνία 45 μοιρών, τότε θα παρατηρήσουμε αλλαγή. Υπάρχουν συνολικά πέντε διαφορετικές γωνίες κατά τις οποίες μπορούμε να περιστρέψουμε τον αστερία δίχως να αντιλαμβανόμαστε διαφορά στον προσανατολισμό. Αυτές είναι οι κατά 0, 72, 144, 216, 288, δηλαδή τα ακέραια πολλαπλάσια του ενός πέμπτου μιας πλήρους στροφής.

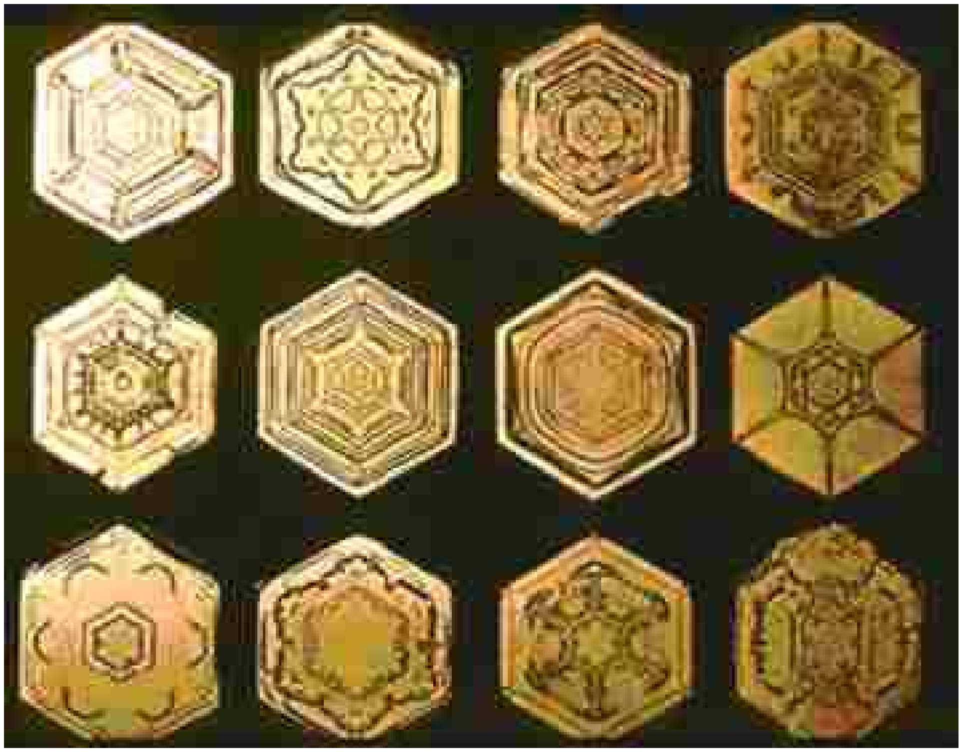


Οι συμμετρίες ενός τέλειου αστερία: α) Περιστροφή β) Κατοπτρισμός

Θα λέμε ότι ο αστερίας έχει πενταπλή περιστροφική συμμετρία. Οι περιστροφές στις δύο διαστάσεις δεν έχουν άξονα περιστροφής αλλά ένα συγκεκριμένο σημείο, το κέντρο περιστροφής που δεν μετακινείται καθόλου. Βέβαια, όπως προκύπτει από το σχήμα, ο αστερίας εκτός από την εμφανή περιστροφική συμμετρία, έχει και αμφίπλευρη συμμετρία, αφού τα δύο μισά στα οποία τον χωρίζει ένας άξονας που διέρχεται από μία κορυφή του, είναι κατοπτρικά όμοια. Ο άξονας αυτός διέρχεται από το κέντρο της περιστροφικής συμμετρίας του αστερία και προφανώς υπάρχουν πέντε τέτοιοι άξονες, όσα και τα πόδια του αφού καθένα έχει το δικό του άξονα συμμετρίας ως προς τον αντίστοιχο κατοπτρισμό. Οι άξονες αυτοί διαφέρουν κατά γωνία 72 μοιρών. Συνολικά, ο πεντάποδος αστερίας έχει δέκα δυνατές συμμετρίες: πέντε περιστροφικές κατά πολλαπλάσια των 72 μοιρών και πέντε αμφίπλευρες ως προς τους αντίστοιχους άξονες που διέρχονται από κάθε πόδι του. Το λουλούδι της φωτογραφίας έχει επίσης πενταπλή περιστροφική συμμετρία, δηλαδή εάν κανείς κοιτάξει το λουλούδι και την ώρα που κοιτάζουμε αλλού, κάποιος το περιστρέψει γύρω από το κέντρο του κατά γωνία πολλαπλάσια των 72 μοιρών δεν θα καταλάβουμε καμιά διαφορά.

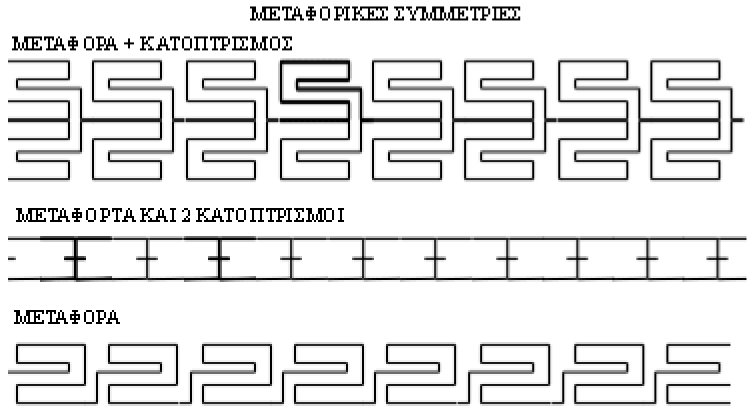
Η περιστροφική συμμετρία είναι επίσης ένας μετασχηματισμός (1-1 και επί απεικόνιση) του επιπέδου ή του χώρου στον εαυτό του. Ο πλήρης ορισμός της είναι: Λέμε ότι ένα σχήμα έχει περιστροφική συμμετρία όταν ταυτίζεται με την εικόνα του μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού της στροφής κατά μια γωνία . Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς πως η κεντρική συμμετρία είναι μια περίπτωση περιστροφικής συμμετρίας, αφού προκύπτει με στροφή γύρω από το κέντρο της Ο κατά γωνία 180 μοιρών. Περιστροφική συμμετρία εμφανίζεται πολύ συχνά στα λουλούδια και ειδικά η πενταπλή περιστροφική συμμετρία., όπως φαίνεται και στο παράδειγμα της φωτογραφίας. Επίσης, τέτοια συμμετρία παρατηρείται και μεταξύ των κατώτερων ζωικών οργανισμών. Για παράδειγμα οι δισκομέδουσες εμφανίζουν οκταγωνική περιστροφική συμμετρία. [Β-1, σελ 84] Αντίθετα, στις τέλεια συμμετρικές δημιουργίες της ανόργανης φύσης, τους κρυστάλλους, η πενταπλή περιστροφική συμμετρία δεν εμφανίζεται ποτέ. Οι μόνες δυνατές συμμετρίες είναι 2ης, 3ης, 4ης και 6ης τάξης [Β-1, σελ 86]. Οι κρύσταλλοι του χιονιού είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα εξαπλής περιστροφικής συμμετρίας.

Όλοι οι κρύσταλλοι του χιονιού βασίζονται στο κανονικό εξάγωνο αλλά κάθε ένας έχει ένα μοναδικό σχέδιο. Ένας κρύσταλλος χιονιού φαίνεται στη φωτογραφία ενώ στο παρακάτω σχέδιο παρατηρούμε διάφορες παραλλαγές που εμφανίζονται στους κρυστάλλους του χιονιού.



ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΔΙΑΚΟΣΜΗΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Τέλος, ένα ακόμη είδος συμμετρίας που θα μας απασχολήσει, κυρίως όσον αφορά το επίπεδο και την εμφάνισή της στην τέχνη, είναι η μεταφορική ή διακοσμητική συμμετρία, που βασίζεται στον μετασχηματισμό της παράλληλης μεταφοράς κατά διάνυσμα α. Θα λέμε ότι ένα σχέδιο ή ένα μόρφωμα έχει μεταφορική συμμετρία όταν ταυτίζεται με την εικόνα του από τον μετασχηματισμό της μεταφοράς. Ακόμη, για μια τέτοια εικόνα που παραμένει αναλλοίωτη από τη μεταφορά κατά , λέμε ότι εμφανίζει μια επ' άπειρον σχέση, δηλαδή επανάληψη με κανονικό ρυθμό μέσα στο χώρο. Αυτή η μεταφορά γίνεται να συνδυαστεί με ανακλαστική συμμετρία. Σε αυτήν την περίπτωση, τα κέντρα των κατοπτρισμών εμφανίζονται σε κάθε μέσο της μεταφοράς, δηλαδή απέχουν το ένα από το άλλο απόσταση 1/2α. ρα έχουμε δυο είδη μεταφορικής συμμετρίας: ένα που εμφανίζεται μόνο η μεταφορά και άλλο ένα που η μεταφορά συνδυάζεται με κατοπτρισμό.



Παραδείγματα μεταφορικής συμμετρίας συναντάμε στις διακοσμητικές ταινίες, σε γλυπτά, κίονες, αγγεία κ.α.. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταφορικής συμμετρίας (χωρίς κατοπτρισμό) φαίνεται στην διακοσμητική ταινία στο επάνω μέρος του διπλανού γλυπτού που βρίσκεται στην Villa Barbaro, στο Maser, της Ιταλίας και έχει σχεδιαστεί από τον Andrea Palladio.[Φωτό: B-B]

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε μια ατσάλινη επιφάνεια στην οποία το σχηματιζόμενο μόρφωμα έχει μεταφορική συμμετρία. Αν το φανταστούμε να επεκτείνεται στο άπειρο, τότε προφανώς οποιαδήποτε μεταφορά του θα το αφήνει φαινομενικά αναλλοίωτο. Μάλιστα το συγκεκριμένο σχέδιο φαίνεται να συνδυάζει και κατοπτρική συμμετρία μαζί με την μεταφορική. Η μεταφορική συμμετρία συναντάται κατά προσέγγιση συνήθως και στον οργανικό κόσμο. Για παράδειγμα, μια σαρανταποδαρούσα έχει, εκτός από αμφίπλευρη, μεταφορική συμμετρία ως προς τον άξονα της.

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα αντικείμενο δεν έχει συμμετρία αλλά συμμετρίες, δηλαδή μετασχηματισμούς που το αφήνουν αμετάβλητο και έτσι εκτός από την ποιοτική περιγραφή της συμμετρίας, δηλαδή το είδος, διαθέτουμε και μια ποσοτική περιγραφή της. Έτσι ένα σώμα μπορεί να διαφέρει ως προς τη συμμετρία του από ένα άλλο αφού μπορεί μεν να έχουν το ίδιο είδος συμμετρίας ποιοτικά αλλά το ένα να έχει περισσότερες ποσοτικά από το άλλο. Για παράδειγμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο αστερίας έχει διαφορετική συμμετρία από τον άνθρωπο αφού έχει δέκα συμμετρίες ενώ εμείς μόνο δύο, την αμφίπλευρη και την ταυτοτική [B-5]. Η συστηματική αυτή αντιμετώπιση της συμμετρίας είναι αρκετά χρήσιμη. Ο Galois (1811-1832) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι εξισώσεις πέμπτου βαθμού δεν έχουν το κατάλληλο είδος συμμετρίας απέδειξε ότι δεν μπορούν να λυθούν με κάποιο τύπο. [B-5]

ΛΟΓΟΙ ΥΠΑΡΞΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Στην επιστήμη, δεν υπάρχει καμία απολύτως διαφορά μεταξύ αριστερού και δεξιού, όπως υπάρχει ανάμεσα στο αρσενικό και το θηλυκό, πέραν του γεγονότος ότι το ένα έχει εκλεγεί αυθαίρετα να λέγεται αριστερό ή δεξιό επειδή βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από το άλλο, δεξί ή αριστερό αντίστοιχα. Στο χώρο όταν μιλάμε για αριστερό ή δεξιό αναφερόμαστε σε προσανατολισμό μιας βίδας. Στροφή προς τα αριστερά εννοούμε ότι η φορά προς την οποία στρέφεται μαζί με την διεύθυνση της από τα κάτω προς πάνω σχηματίζει μια αριστερόστροφη βίδα. [B-1] Γενικότερα, η φύση πουθενά δεν έχει δείξει να πριμοδοτεί το δεξιό εις βάρος του αριστερού ούτε το αντίστροφο. Αυτό που φαίνεται καθαρά, όπως γράφει ο Weyl, "είναι ότι σε όλη τη φυσική τίποτε δεν φαίνεται να δείχνει μια ουσιαστική διαφορά του αριστερού και του δεξιού. Όπως όλα τα σημεία και όλες οι διευθύνσεις στο χώρο είναι ισοδύναμα, το ίδιο και το αριστερό και το δεξιό. Αριστερή ή δεξιά θέση ή διεύθυνση είναι έννοιες σχετικές". Η μυθολογική άποψη, αντιθέτως, νοηματοδοτεί διαφορετικά τις έννοιες δεξιός και αριστερός, για παράδειγμα συμβολίζοντας αντίστοιχα το καλό και το κακό παλαιότερα. Ο Weyl φωτίζοντας λίγο αυτήν την μυθική άποψη περί ανωτερότητας του δεξιού υπενθυμίζει την διπλή σημασία της λέξης right στα αγγλικά, με ποιο χέρι χαιρετιούνται οι άνθρωποι, ποιος από τους ληστές που σταυρώθηκαν με το Χριστό πήγε στον παράδεισο καθώς και συμβολικές αναφορές από τις Γραφές. Η τελική, πάντως, διαπίστωση είναι ότι στην οργάνωση της φύσης κυριαρχεί η συμμετρία του δεξιού με το αριστερό, αν και δεν περιμένουμε να την δείχνει τέλεια κάθε πράγμα στη φύση. Είναι εύλογη η απορία εάν υπάρχει κάποια αιτία για αυτό. Μια τέτοια αιτία υπάρχει και πρέπει να είναι ότι η πιθανότερη μορφή ισορροπίας μάλλον είναι η συμμετρική. Δηλαδή, από όλες τις συνθήκες που καθορίζουν μια κατάσταση ισορροπίας, η συμμετρία των συνθηκών αντανακλάται στην κατάσταση ισορροπίας [B-1]. Για παράδειγμα η γη θα ήταν τελείως σφαιρική εάν δεν περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα της, πράγμα που την πλαταίνει στους πόλους, αλλά η συμμετρία της (περιστροφική) διατηρείται. Αυτό που συνήθως έχει ανάγκη εξήγησης δεν είναι η ύπαρξη και διατήρηση της συμμετρίας, που αναμένεται, αλλά το λεγόμενο σπάσιμο της συμμετρίας, δηλαδή την απόκλιση από αυτήν, όπως στο παράδειγμα της γης εμφανίζεται στην άνιση κατανομή στεριάς θάλασσας. Για τον ίδιο λόγο ο W. Ludwig στην πραγματεία του για τη συμμετρία στη ζωολογία δεν δίνει εξήγηση για την καταγωγή της αμφίπλευρης συμμετρίας που επικρατεί στο ζωικό βασίλειο, αλλά επιμένει περισσότερο στην επιμέρους διαφοροποίηση - ασυμμετρία από το βασικό συμμετρικό σχέδιο. Γράφει:

"Το ανθρώπινο σώμα, όπως και των άλλων σπονδυλωτών, είναι βασικά κατασκευασμένο αμφίπλευρο-συμμετρικά. Όλες οι παρατηρούμενες ασυμμετρίες είναι δευτερεύοντος χαρακτήρα και οι πιο σπουδαίες απ' αυτές, που επηρεάζουν τα εσωτερικά όργανα, καθορίζονται κυρίως από την ανάγκη του πεπτικού σωλήνα να αυξάνει την επιφάνεια του δυσανάλογα με την ανάπτυξη του σώματος, η επιμήκυνση του οποίου οδηγεί σε μια ασυμμετρική πτύχωση και περιστροφή. Κατά την πορεία της φυλογενετικής εξέλιξης, αυτές οι πρώτες ασυμμετρίες που αφορούν το πεπτικό σύστημα και τα συναφή του όργανα προκάλεσαν ασυμμετρίες και στα άλλα οργανικά συστήματα".

Πάνω σε αυτό το θέμα της καταγωγής της συμμετρίας ο Weyl γράφει πως εάν η φύση ήταν πέρα για πέρα νομοταγής τότε κάθε φαινόμενο θα το διεπόταν από την συμμετρία των παγκόσμιων νόμων της φύσης όπως καθορίζονται στη θεωρία της σχετικότητας. Το γεγονός ότι δεν είναι έτσι μας αποδεικνύει ότι το απρόοπτο και το τυχαίο είναι συστατικά στοιχεία του κόσμου. Πάντως το θέμα της αιτίας ύπαρξης της συμμετρίας είναι αρκετά περίπλοκο και κάθε απόπειρα εξαγωγής τελικού συμπεράσματος είναι επισφαλής. Ίσως γιατί το συγκεκριμένο θέμα δεν είναι αμιγώς επιστημονικό. Ο ίδιος ο Weyl γράφει πως αν για ένα κομμάτι ύλης η ολική φυσιολογική του συμμετρία δεν περιορίζεται σε τίποτα παρά μόνο από τη σχετική του θέση τότε το πιθανότερο είναι πως θα πάρει σχήμα σφαίρας με κέντρο τη θέση αυτή. Γι' αυτό το λόγο οι κατώτερες μορφές ζωής που αιωρούνται στο νερό είναι λίγο πολύ σφαιρικές. Οι μορφές ζωής όμως που έχουν τη δυνατότητα να αυτοκινούνται στον αέρα, το νερό ή επάνω στη γη επηρεάζονται από τις διευθύνσεις της βαρύτητας και της κίνησης τους. Συνεπώς μετά τον προσδιορισμό των αξόνων πάνω-κάτω και εμπρός-πίσω, μόνο για τον άξονα αριστερά-δεξιά μένει αυθαίρετη επιλογή και σε αυτό το στάδιο δεν υπάρχει ανώτερη μορφή ισορροπίας από την αμφίπλευρη συμμετρία. Τέλος, ακόμη και εάν υπάρχουν παράγοντες στην εξέλιξη που τείνουν να διαφοροποιήσουν το δεξιό από το αριστερό, πιθανότατα εξουδετερώνονται από το πλεονέκτημα που αντλεί το ζώο από τον αμφίπλευρο σχηματισμό των οργάνων κίνησης του και των άκρων: εάν δεν ήταν συμμετρικά σχηματισμένα, τότε η κίνηση του θα ήταν τύπου κοχλία αντί για ευθύγραμμη. Έτσι, εξηγείται γιατί τα άκρα μας είναι περισσότερο συμμετρικά από τα εσωτερικά μας όργανα [B-1].

Ο Αριστοφάνης στο Συμπόσιο του Πλάτωνα αφηγείται μια διαφορετική ιστορία για το πως προήλθε η αμφίπλευρη από τη σφαιρική συμμετρία. Αρχικά ο άνθρωπος ήταν στρογγυλός με την πλάτη και τις πλάτες του να σχηματίζουν κύκλο ("έπειτα όλον ήν εκάστου του ανθρώπου το είδος στρογγύλον, νώτον και πλευράς κύκλω έχον") Για να ταπεινώσει την υπερηφάνεια και την δύναμη τους ο Δίας άρχισε να τους κόβει στα δύο (έτεμνε τους ανθρώπους δίχα") και ο Απόλλων τους έστριβε τα πρόσωπα. Και ο Δίας απείλησε "αν συνεχίσουν να φαίνονται αδιάντροποι...και θα τους ξαναδιχοτομήσω και θα βαδίζουν με το ένα πόδι σαν εκείνους που παίζουν το κουτσό".[B-1]

ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

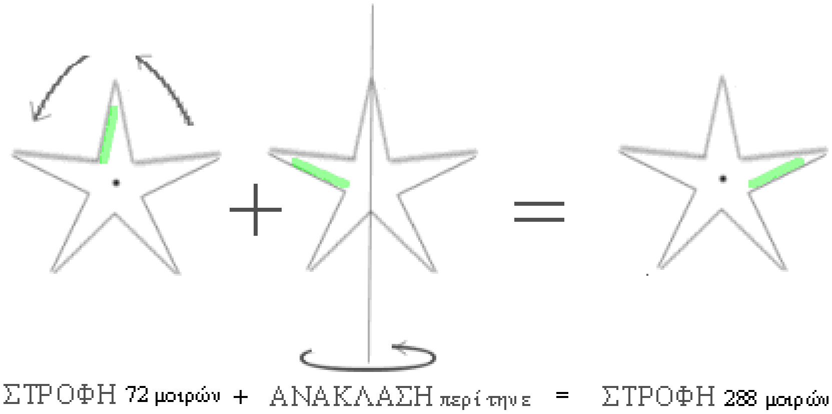
Τα πιο εντυπωσιακά παραδείγματα συμμετρίας στην ανόργανη φύση είναι οι κρύσταλλοι. Στην κρυσταλλική κατάσταση της ύλης τα άτομα ταλαντώνονται γύρω από θέσεις ισορροπίας, οι οποίες σχηματίζουν στο χώρο ένα καθορισμένο κανονικό σχήμα..

Όλες οι κλάσεις κρυστάλλων διαιρούνται σε έξι συστήματα, με βάση το μήκος των αξόνων και τις υπόλοιπες λεπτομέρειες των συμμετριών τους. [B-B]. [Συνολικά υπάρχουν 230 είδη ομάδων συμμετρίας στους κρυστάλλους]

Στη φυσική, ένα σύστημα θεωρείται συμμετρικό εάν παραμένει αμετάβλητο όταν υπόκειται σε διαδικασίες όπως κατοπτρική αντιστροφή, αντιστροφή της διεύθυνσης του χρόνου και μετασχηματισμό του χωροχρόνου. Πολλά φυσικά συστήματα υπακούν σε τέτοιου είδους συμμετρίες, με τις οποίες σχετίζονται οι νόμοι διατήρησης της φυσικής. Η σχέση αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία στη φυσική των σωματιδίων, όπου συγκεκριμένες συμμετρίες, που λέγονται εσωτερικές, παρατηρούνται. Τέτοιες συμμετρίες υπάρχουν στο χώρο της μαθηματικής σκέψης και στηρίζουν τη διατήρηση τέτοιων ποσοτήτων όπως το φορτίο, η ισότητα, το πλήθος των βαρυόνιων και λεπτόνιων, και η ολικά ασυνήθιστη κατάσταση όταν συγκεκριμένα σωμάτια αντικαθίστανται μεταξύ τους. Στη σύγχρονη θεωρητική φυσική, πάντως, τέτοιες συμμετρίες είναι γνωστές μόνο κατά προσέγγιση, εκτός όμως από τα βαρυόνια και τα λεπτόνια, όπου παραβιάζονται κατά τα πειράματα με αυτά. Όταν οι εσωτερικές συμμετρίες δεν λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο , αλλά αντιθέτως μπορούν να διαφέρουν σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, αποκαλούνται συμμετρίες gauge. Οι θεωρητικοί φυσικοί ελπίζουν ότι θα καταφέρουν να μειώσουν όλες τις συμμετρίες σε συμμετρίες gauge στην προσπάθεια τους να αναπτύξουν μια μεγάλη ενοποιητική θεωρία (Θεωρία των Πάντων), η οποία θα ενσωματώνει όλες της θεμελιώδεις λειτουργίες και ιδιότητες της ύλης. [B-E]

ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΤΕΡΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Η αντίληψη ότι οι συμμετρίες είναι καλύτερα κατανοητές ως μετασχηματισμοί προέκυψε όταν συνειδητοποιήθηκε το γεγονός ότι το σύνολο των συμμετριών ενός αντικειμένου δεν είναι απλά μια αυθαίρετη συλλογή αντικειμένων αλλά έχει εσωτερική δομή. Αυτή είναι η δομή που στα μαθηματικά ονομάζεται ομάδα. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του αστερία, είδαμε ότι το αντικείμενο αυτό έχει 10 συμμετρίες, πέντε περιστροφικές με τη μία την ταυτοτική και πέντε αμφίπλευρες. Αν υποθέσουμε ότι εφαρμόζουμε στον αστερία δύο τέτοιους μετασχηματισμούς, το έναν μετά τον άλλο, τότε καθένας αφήνει φαινομενικά αναλλοίωτο τον αστερία και έτσι το τελικό αποτέλεσμα είναι να μένει ο αστερίας αναλλοίωτος. Δηλαδή το αποτέλεσμα της σύνθεσης των δύο μετασχηματισμών συμμετρίας είναι πάλι μια συμμετρία. Για παράδειγμα μια στροφή κατά 72 μοίρες και μια ανάκλαση ισοδυναμεί με μια στροφή κατά 288 μοίρες.



Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε για δύο οποιεσδήποτε συμμετρίες κάθε σχήματος. Άρα το σύνολο των μετασχηματισμών συμμετρίας ενός σχήματος είναι κλειστό ως προς την πράξη της σύνθεσης δύο μετασχηματισμών. Η εξήγηση είναι απλή: μια συμμετρία είναι ένας μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτο το αντικείμενο. Δηλαδή αν πάρουμε ένα αντικείμενο και εφαρμόσουμε την πρώτη συμμετρία, τότε φαίνεται όμοιο πριν και μετά την εφαρμογή της συμμετρίας και είναι ίδια η σχετική του θέση. Το ίδιο συμβαίνει και με την εφαρμογή της δεύτερης συμμετρίας: το αντικείμενο παραμένει αμετάβλητο. Άρα συνολικά το αντικείμενο μένει αναλλοίωτο εάν εφαρμόσουμε και τις δύο συμμετρίες. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση δύο συμμετριών δίνει μια συμμετρία. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει και η προσεταιριστικότητα, δηλαδή δεν έχει σημασία η σειρά που εκτελούνται οι συνθέσεις. Ακόμη υπάρχει μια μονάδα, δηλαδή ένα ταυτοτικό στοιχείο στο σύνολο των συμμετριών κάθε αντικειμένου, που δεν κάνει τίποτα. Αυτή είναι η ταυτοτική συμμετρία. Τέλος, για κάθε συμμετρία ενός αντικειμένου υπάρχει και η αντίστροφή της. Για παράδειγμα στις ανακλάσεις, η αντίστροφη κάθε μιας τέτοιας συμμετρίας είναι η ίδια, ενώ στις περιστροφές κατά μια γωνία θ, η αντίστροφη είναι η περιστροφή κατά αντίθετη γωνία -θ. Συνεπώς, πληρούνται και οι τέσσερις ιδιότητες που είναι απαραίτητες για να έχει ένα σύνολο δομή ομάδας. Άρα όντως όλες οι δυνατές συμμετρίες ενός οποιοδήποτε αντικειμένου του επιπέδου ή του χώρου συγκροτούν μια ομάδα.

Αν και φαίνεται απλό και προφανές, κανείς δεν πρόσεξε για καιρό το γεγονός ότι είναι ομάδα το σύνολο των συμμετριών ενός αντικειμένου. Αλλά ακόμη κι όταν κάποιοι το παρατήρησαν, χρειάστηκαν κάμποσο χρόνο για να εκτιμήσουν τη σημασία της παρατήρησης αυτής που οδήγησε σε μια άλγεβρα της συμμετρίας, δηλαδή τη θεωρία ομάδων. Η απλή αντίληψη αυτή της ομάδας δεν προέκυψε επειδή κάποιος σκέφτηκε τι είναι η συμμετρία, αλλά όταν υπόνοιες για την γενική ιδέα εμφανίστηκαν μέσα από σημαντικά προβλήματα. Ένα από τα πρώτα θεωρήματα που σχετίζονται με τη συμμετρία αποδείχθηκε στο 13ο βιβλίο του πολύτομου έργου Στοιχεία του Ευκλείδη (3ος αιώνας π.Χ.) και αφορά την ύπαρξη και την κατασκευή των πέντε μοναδικών κανονικών πολύεδρων: τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, εικοσάεδρο και δωδεκάεδρο. Ο Ευκλείδης μας δίνει την απόδειξη και αναφέρει ότι η αποκάλυψη έγινε αρχικά από πυθαγόρειους, για να ολοκληρωθεί όσον αφορά στο οκτάεδρο και στο εικοσάεδρο από ένα μαθητή του Πλάτωνα, τον Θεαίτητο. Ο Πλάτωνας τα χρησιμοποιεί, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, στον διάλογό του "Τίμαιος" για την κοσμολογία του υποστηρίζοντας ότι αυτά τα σχήματα έχουν τα θεμελιώδη μόρια των τεσσάρων στοιχείων που αποτελούν την ύλη: η φωτιά, η γη, το νερό και ο αέρας. Για αυτό και λέγονται πλατωνικά σώματα. Φυσικά, ο Πλάτωνας δεν φαίνεται να κατείχε κάποια μαθηματική τυποποίηση της έννοιας της συμμετρίας. Αυτό που τον προσέλκυσε να τα χρησιμοποιήσει πρέπει να ήταν η αισθητική τους αξία.

Τελικά, όμως η έννοια της ομάδας δεν προέκυψε από την γεωμετρία αλλά από την άλγεβρα και συγκεκριμένα από τη λύση των εξισώσεων. Μέχρι το 1770 οι μαθηματικοί αναζητούσαν τύπους για την επίλυση των 5ου βαθμού εξισώσεων. Τότε ο Lagrange έδειξε ότι οι τύποι για την λύση των εξισώσεων δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού ανάγονται όλοι σε μια μοναδική γενική τεχνική και ότι η τεχνική αυτή δεν επαρκεί για τις εξισώσεις 5ου βαθμού. Φυσικά, θα μπορούσε να υπάρχει κάποια άλλη τεχνική, όμως κανείς δεν μπορούσε να φτάσει σε κάποια. Έτσι ο Lagrange είχε δείξει τη φύση του προβλήματος. Η τεχνική του ήταν η μελέτη των μεταθέσεων των υποθετικών λύσεων της εξίσωσης. Για παράδειγμα, οι τρεις λύσεις της 3ου βαθμού εξίσωσης μετατίθενται κατά έξι τρόπους: αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα, Το 1824, ο Abel απέδειξε με αυτήν την ιδέα ότι ο περίφημος τύπος δεν υπάρχει. Η απόδειξη του όμως ήταν περίπλοκη και δεν εισερχόταν στην καρδιά του προβλήματος. Η τελική απόδειξη προήλθε από τον Evariste Galois (1811-1832). Εκείνος ανέπτυξε μια γενική θεωρία για τις μεταθέσεις των λύσεων των εξισώσεων, επικεντρώνοντας την προσοχή του σε εκείνες τις μεταθέσεις που αφήνουν αναλλοίωτες τις αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των λύσεων. Εκεί παρατήρησε μια ιδιότητα των συστημάτων των μεταθέσεων: αν γίνουν διαδοχικά δύο από αυτές, τότε το αποτέλεσμα είναι πάντοτε μία ακόμη μετάθεση του ίδιου συστήματος. Αυτά τα συστήματα τα ονόμασε ομάδες μεταθέσεων. Το αποκορύφωμα της εργασίας του ήταν η απόδειξη πως για να έχει μια εξίσωση κάποιο τύπο επίλυσης θα πρέπει να έχει ομάδα ενός συγκεκριμένου είδους και ότι οι εξισώσεις 5ου βαθμού δεν έχει το κατάλληλο είδος. [B-5]

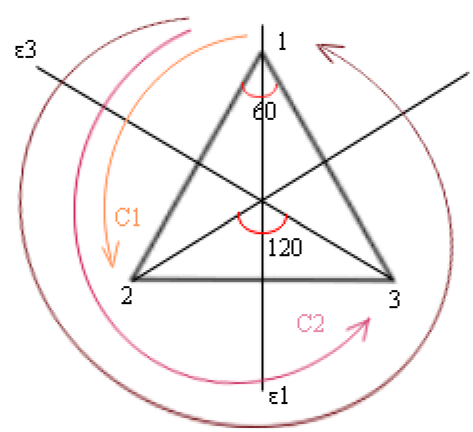
Οι μεταθέσεις των λύσεων των εξισώσεων του Lagrange και του Galois δεν φαίνεται εκ πρώτης όψης να έχουν καμία σχέση με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Όμως οι ομάδες μεταθέσεων των λύσεων μπορούν να θεωρηθούν ομάδες συμμετρίας των εξισώσεων ως εξής: η μετάθεση είναι ένας μετασχηματισμός αφού μετασχηματίζει, κινεί τα στοιχεία του συνόλου των λύσεων. Είναι μια αναδιάταξη τους. Τώρα ένας μετασχηματισμός για να είναι συμμετρία ενός αντικειμένου πρέπει να το αφήνει αμετάβλητο. Το ανάλογο του σχήματος στη θεωρία εξισώσεων είναι οι λύσεις της εξίσωσης. Όπως το σχήμα καθορίζεται από τις αποστάσεις ανάμεσα στα σημεία που το συνθέτουν και μια συμμετρία είναι μια κίνηση που πρέπει να τις διατηρεί, έτσι και οι συμμετρίες μιας εξίσωσης οφείλουν να διατηρούν τις βασικές αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των λύσεων της, όπως ακριβώς όρισε τις ομάδες του ο Galois.

ΣΥΝΟΨΗ - Η ΟΜΑΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ας επιχειρήσουμε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε μέχρι τώρα, μέσα όμως από το φίλτρο του Herman Weyl [B1]. Έστω ότι ζητάμε τις δυνατές συμμετρίες ενός σχήματος, έστω του πρώτου από τα κανονικά πολύγωνα, του ισόπλευρου τριγώνου. Στην ουσία,

από όσα είδαμε μέχρι τώρα ζητάμε τίποτε άλλο, παρά όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς [1-1 και επί] ενός συνόλου (εδώ επίπεδο) στον εαυτό του που αφήνουν αναλλοίωτη τη δομή του επιπέδου, που σημαίνει ότι "απεικονίζουν δυο συμπίπτουσες εικόνες σε δύο συμπίπτουσες", δηλαδή ζητάμε όλους τους αυτομορφισμούς [ομοιοθεσίες] του επιπέδου που επιπλέον αφήνουν το σχήμα [εδώ τρίγωνο] αναλλοίωτο. Το σύνολο, τώρα, όλων των αυτομορφισμών του επιπέδου σχηματίζει ομάδα και είναι η συμμετρία του επιπέδου. Επιπλέον, από όλους τους αυτομορφισμούς διακρίνουμε εκείνους που διατηρούν τις αποστάσεις, αφού θέλουμε να μένει το σχήμα αναλλοίωτο. Αυτούς τους λέμε ισομετρικούς μετασχηματισμούς ή ισομετρίες, όπως είδαμε στην αρχή. Αυτές οι ισομετρίες είναι δυνατόν να ξεχωριστούν σε γνήσιες ή κινήσεις και μη γνήσιες ή κατοπτρισμούς ανάλογα με το εάν διατηρούν τη φορά ενός κοχλία. Δηλαδή μια ισομετρία είναι κίνηση όταν απεικονίζει έναν αριστερόστροφο κοχλία σε αριστερόστροφο π.χ. μια στροφή, ενώ είναι κατοπτρισμός όταν τον απεικονίζει σε δεξιόστροφο ή το αντίθετο, οπότε οι αμφίπλευρες συμμετρίες που είδαμε στην αρχή, μαζί και η ανθρώπινη είναι μη γνήσιες αφού απεικονίζουν το δεξί στο αριστερό, άσχετα αν είναι όμοια μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει το σχήμα:
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ [1-1, επί, αντιστρέψιμες απεικονίσεις] ----->
-----> ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ [μετασχηματισμοί που διατηρούν τη δομή] ----->
-----> ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ [αυτομορφισμοί που διατηρούν την κλίμακα] :
Α) ΚΙΝΗΣΕΙΣ [γνήσιες ισομετρίες] Β) ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ

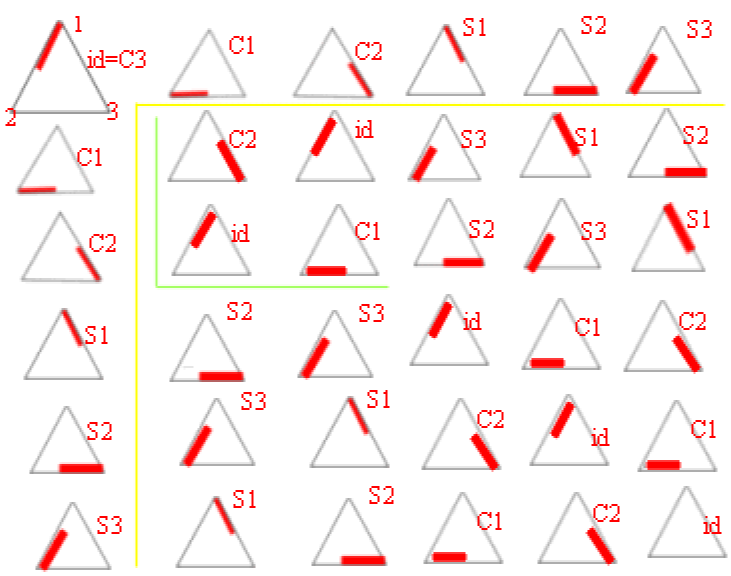
Στο ισόπλευρο τρίγωνο, τώρα, έχουμε έξι αυτομορφισμούς που διατηρούν την κλίμακα άρα έξι δυνατές ισομετρίες. Αυτές είναι οι τρεις περιστροφές γύρω από το ορθόκεντρο Ο του τριγώνου κατά γωνίες που είναι τα πολλαπλάσια της γωνίας α=120 μέχρι την πλήρη περιστροφή, δηλαδή 120, 240, 360=0. Ακόμη υπάρχουν άλλες τρεις ισομετρίες, που είναι οι κατοπτρισμοί με άξονες τους ε1, ε2, ε3 που διέρχονται από τις αντίστοιχες κορυφές και το Ο και σχηματίζουν γωνία 1/2α, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σύνολο όλων των ισομετριών ενός σχήματος συνιστούν ομάδα που είδαμε ότι λέγεται ομάδα συμμετρίας του σχήματος και εκφράζει ακριβώς τη συμμετρία του. Στην περίπτωση του τριγώνου, η ομάδα συμμετρίας του αποτελείται από έξι στοιχεία, τις τρεις κινήσεις-στροφές κατά 120 μοίρες και τους τρεις κατοπτρισμούς. λέγεται διεδρική και συμβολίζεται με D3. Αν ονομάσουμε C1, C2, C3=id τις στροφές και S1, S2, S3 τους κατοπτρισμούς θα είναι D3={C1,C2,C3, S1,S2,S3}.

Οι κινήσεις συγκροτούν υποομάδα της ομάδας συμμετρίας, αφού η σύνθεση δύο κινήσεων είναι πάντα κίνηση, η οποία μάλιστα είναι κυκλική δείκτου 2 υποομάδα της ομάδας των ισομετριών. Αυτό σημαίνει πολύ απλά ότι μπορούμε να βλέπουμε τις συμμετρίες ενός σχήματος σαν το άθροισμα δύο ξεχωριστών κλάσεων: η μία κλάση περιέχει όλες τις κινήσεις και η άλλη περιέχει όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή τους κατοπτρισμούς. Οι τελευταίοι δεν σχηματίζουν ομάδα, αφού η μεταξύ τους σύνθεση δίνει πάντα στροφή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Όμως η σύνθεση οποιασδήποτε κατοπτρισμού με οποιαδήποτε στροφή δίνει μη αντιμεταθετικά πάντα κατοπτρισμό.

Στην ομάδα συμμετρίας του τριγώνου, οι τρεις στροφές που είναι κινήσεις συγκροτούν ομάδα, αφού κάθε σύνθεσή τους ξαναδίνει στροφή, και προφανώς είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα Z3 αφού μόνο μια ομάδα τάξης 3 υπάρχει και γράφουμε C3~Z3 Αντίθετα οι κατοπτρισμοί δεν σχηματίζουν ομάδα ούτε και στο τρίγωνο όπου όπως φαίνεται στο σχήμα, δίνουν πάντα στροφή όταν συντίθενται μεταξύ τους. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι για κάθε n=3,4,5 ... υπάρχει ένα κανονικό n-γωνο που έχει ομάδα συμμετρίας την αντίστοιχη διεδρική με τάξη 2n. Συνολικά για τις δύο διαστάσεις, έχουμε τις δύο ακόλουθες δυνατότητες για πεπερασμένες ομάδες περιστροφών ως προς κέντρο O: 1) την ομάδα που αποτελείται από την στροφή γωνίας α=360/n και τις επαναλήψεις της, δηλαδή τις κινήσεις και 2) την ομάδα που αποτελείται από τις προηγούμενες συνδυασμένες από κατοπτρισμούς σε n άξονες που σχηματίζουν γωνίες ίσες 1/2α (μη γνήσιες κινήσεις). Η πρώτη είναι η κυκλική και συμβολίζεται με Cn, ενώ η δεύτερη διεδρική με Dn. Τέλος, είναι άξιο αναφοράς ότι η διεδρική ομάδα D3 είναι η μικρότερης τάξης μη αβελιανή, δηλαδή μη αντιμεταθετική ομάδα, κάτι το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα - πίνακα της D3. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση της S2 με την S1 δίνει τη στροφή C2, ενώ αντίστροφα S1* S2 = C1.

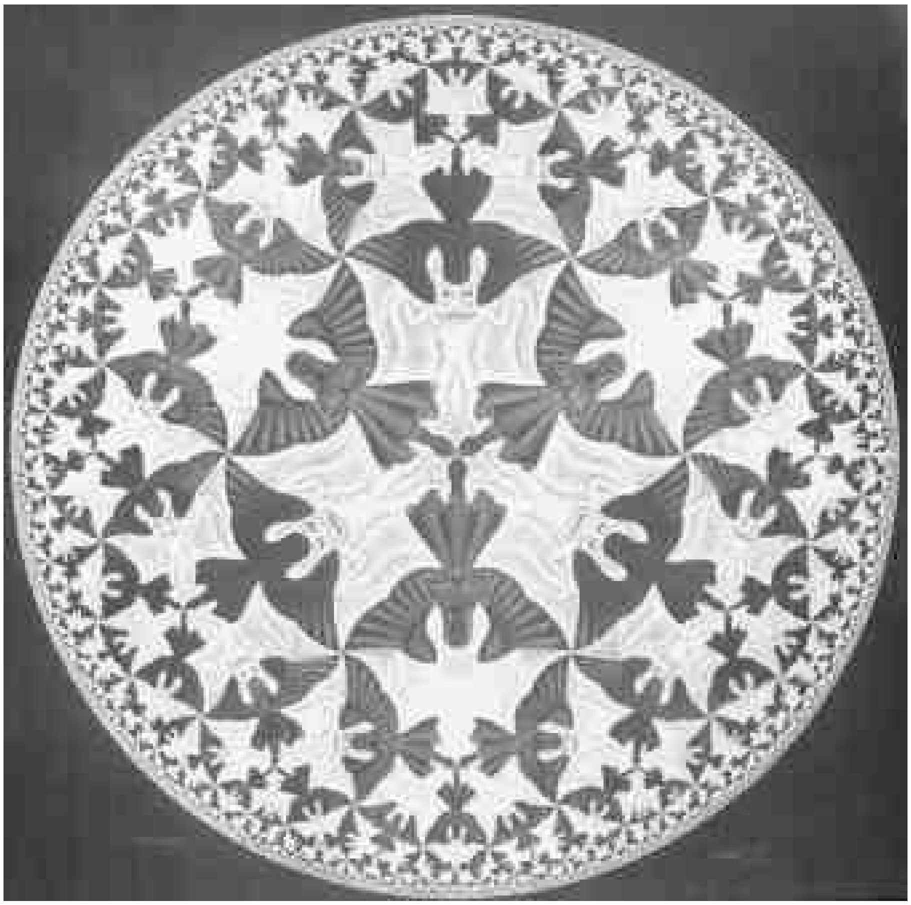


ΤΟ ΠΕΡΙΦΗΜΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ERLANGEN

Μέχρι τώρα μελετάμε τη συμμετρία σαν κάτι που να εμφανίζεται μέσα από τη γεωμετρία. Όμως, ένας Γερμανός μαθηματικός, ο Felix Klein έφερε τα πάνω κάτω θεωρώντας ότι οι Γεωμετρίες είναι συνεπακόλουθο της συμμετρίας. Ο Klein έγινε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Erlangen το 1872. Στην εναρκτήρια διάλεξη του, που έμεινε γνωστή σαν Πρόγραμμα Erlangen, έθεσε ως στόχο να βάλει σε τάξη τις Γεωμετρίες κάνοντας τις δευτερεύουσες, δίνοντας τον πρώτο λόγο στη συμμετρία. Η βασική ιδέα πίσω από αυτά ήταν ότι η γεωμετρία δεν είναι τίποτε άλλο από θεωρία ομάδων. Οι ομάδες σχηματίζονται γενικά από εκείνους τους μετασχηματισμούς που αφήνουν τις γεωμετρικές έννοιες απαράλλαχτες, αλλά ο Klein πίστεψε ότι αυτή η σχέση μπορεί να αναστραφεί και έλεγε ότι "οι γεωμετρικές ιδιότητες χαρακτηρίζονται από την σταθερότητά τους κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών". Κάθε γεωμετρία έχει τη δική της ομάδα αλλά μέσα στον σκελετό της ομάδας αυτής κάθε γεωμετρία ακολουθεί ανάλογη πορεία. [B-5]

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία για παράδειγμα, οι βασικές έννοιες είναι οι αποστάσεις και οι γωνίες. Οι μετασχηματισμοί που τις διατηρούν είναι οι κινήσεις στερεού, δηλαδή οι ισομετρίες. Κατά συνέπεια η ιδέα του Klein είναι να αντιστρέψουμε το παραπάνω και να πάρουμε τη ομάδα των ισομετριών ως το βασικό αντικείμενο από το οποίο θα προκύψει η αντίστοιχη γεωμετρία. Έτσι στην ευκλείδεια γεωμετρία μια θεμιτή γεωμετρική γενική ιδέα είναι οτιδήποτε παραμένει αμετάβλητο μετά από μια ισομετρία. Το ορθογώνιο τρίγωνο για παράδειγμα είναι μια θεμιτή ιδέα, αλλά κάτι οριζόντιο δεν είναι , αφού οι ευθείες μπορούν να παρουσιάσουν κλίση μετά από έναν μετασχηματισμό. Συνεπώς, εξηγείται καθαρά και η εμμονή του Ευκλείδη στα ίσα τρίγωνα σαν αποδεικτική μέθοδος αφού τα τρίγωνα είναι ακριβώς ίσα όταν το ένα μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο άλλο με έναν μετασχηματισμό ισομετρίας. Ο Ευκλείδης τα χρησιμοποίησε για να παίξουν τον ίδιο ρόλο που παίζουν στο πρόγραμμα του Erlangen οι μετασχηματισμοί. [B-5]

Η μη ευκλείδεια γεωμετρία βασίζεται και αυτή στις μετρικές και τις γωνίες, αλλά συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο από ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες δημιουργήθηκαν όταν κάποιοι αμφισβήτησαν την ορθότητα του 5ου Αιτήματος του Ευκλείδη σύμφωνα με το οποίο: "Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και επί τα αυτά σχηματιζόμενες γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές () τότε όταν οι δυο ευθείες προεκταθούν τέμνονται προς το μέρος που σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες". Μια πιο γνωστή διατύπωση του αξιώματος αυτού, που αποδίδεται στον □γγλο μαθηματικό John Playtair (1748-1819) είναι ότι "παράλληλη προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής είναι μοναδική". Στη μία από τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες, την ελλειπτική γεωμετρία του Riemann, οι παράλληλες ευθείες δεν υπάρχουν καν. Στην άλλη την υπερβολική γεωμετρία, οι παράλληλες υπάρχουν σε άπειρες δέσμες. Κάθε τύπος μη ευκλείδειας γεωμετρίας έχει τη δική του ομάδα από κινήσεις, δηλαδή μετασχηματισμούς που διατηρούν τη δική τους ιδιαίτερη έννοια της απόστασης. Μια γεύση από τις παράξενες αυτές γεωμετρίες παίρνουμε από ένα έργο του Escher, τον οριακό κύκλο IV του 1960, μια λιθογραφία που βασίζεται στην υπερβολική γεωμετρία. Παρόλο που οι άγγελοι και οι δαίμονες φαίνεται να συρρικνώνονται όσο προχωρούν προς την περιφέρεια του κύκλου, αυτό αληθεύει μόνο για τη συνηθισμένη ευκλείδεια αντίληψη της απόστασης. Για την υπερβολική γεωμετρία, στην κατάλληλη απόσταση, όλοι οι άγγελοι και οι δαίμονες είναι πανομοιότυποι: σχηματίζουν ένα ψηφιδωτό του υπερβολικού επιπέδου. Είναι προφανές ότι η εικόνα έχει τρομερά μεγάλη συμμετρία. [B-5]



Στην προβολική γεωμετρία, οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί είναι οι προβολές. Οι προβολές δεν διατηρούν τις αποστάσεις, και έτσι η απόσταση δεν έχει ισχύ εκεί. Η έλλειψη ωστόσο έχει νόημα, αφού η προβολή μιας έλλειψης είναι πάντα έλλειψη.

Βάζοντας τάξη στο χάος, ο Klein μας αποκάλυψε απρόσμενες σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες Γεωμετρίες. Μερικές Γεωμετρίες προέκυψαν να έχουν ομάδες όμοιες με τις ομάδες άλλων γεωμετριών ή ελαφρά παραλλαγμένες. Αυτό σημαίνει ότι δύο τέτοιες γεωμετρίες είναι στην ουσία ισοδύναμες αφού ένας μετασχηματισμός, μια τυποποιημένη διαδικασία μπορεί να μετατρέψει τα θεωρήματα της μιας στα θεωρήματα της άλλης. Παρόμοια, οι Γεωμετρίες που βασίζονται σε ευρύτερες ομάδες είναι γενικότερες από εκείνες που βασίζονται σε μικρότερες ομάδες και επιπλέον κάθε θεώρημα που ισχύει στη γεωμετρία με τη μεγάλη ομάδα ισχύει αυτόματα και στη γεωμετρία με τη μικρή. Για παράδειγμα τα θεωρήματα της προβολικής γεωμετρίας ισχύουν και στην ευκλείδεια. Έτσι εμφανίζεται μια ιεραρχία στις γεωμετρίες, ενώ πριν ήταν όλα μπερδεμένα. [B-5] Η πρόταση του Klein άσκησε τρομερή επιρροή όχι μόνο γιατί ενοποίησε τις γεωμετρίες αλλά και επειδή οι μαθηματικοί της εποχής του ανακάλυπταν ότι όλο και περισσότερα προβλήματα περιστρέφονταν γύρω από μετασχηματισμούς και ομάδες.