Συμμετρία

ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΙΜΑΙΟ ΩΣ ΤΟΝ FELIX KLEIN ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ERLANGEN

---

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ

Το πρώτο και ίσως σημαντικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς όταν γράφει σχετικά με τη συμμετρία και τις εφαρμογές της στη τέχνη και τη φύση είναι ο τρόπος που θα ξεκινήσει, δηλαδή πως θα εισάγει το θέμα σε αυτόν που θα διαβάσει το γραπτό, χωρίς να τον κουράσει με πρόωρους τεχνικούς ορισμούς αλλά και χωρίς να χάσει την ουσία της έννοιας, την ιδέα που κρύβεται πίσω της: τα μαθηματικά. Από όσα συγγράμματα, σχετικά με τη συμμετρία, έχουμε υπόψη είτε αυτά που ακολουθούν την "καλλιτεχνική" προσέγγιση είτε την αυστηρά μαθηματική προσέγγιση, την καλύτερη ίσως εισαγωγή κάνει ο Herman Weyl στο κλασσικό πλέον βιβλίο του "Συμμετρία" [Β-1, σελ 17], το οποίο μνημονεύεται ως η αρτιότερη εκλαίκευση του θέματος από το σύνολο όσων ασχολήθηκαν κατά καιρούς με τη συμμετρία. Γράφει ο Weyl:

"Αν δεν κάνω λάθος, η λέξη συμμετρία χρησιμοποιείται στο καθημερινό μας λεξιλόγιο με δύο σημασίες. Με τη μία από αυτές, συμμετρικό σημαίνει κάτι που έχει καλές αναλογίες, που είναι καλά ισορροπημένο, και η συμμετρία υποδηλώνει την ιδιαίτερη αυτή συμφωνία πολλών μερών με ην οποία συγκροτούν ένα σύνολο. Η ομορφιά είναι συνδεδεμένη με τη συμμετρία."

Στις πρώτες αυτές γραμμές, ο Weyl ξεκαθαρίζει ότι τη συμμετρία μπορεί να τη δει κανείς από δύο διαφορετικές σκοπιές και ταυτόχρονα δίνει ένα ορισμό για τη μία από αυτές. Σύμφωνα με αυτόν, η συμμετρία έχει να κάνει με την ομορφιά ή μάλλον το αντίθετο: η ομορφιά βρίσκεται στη συμμετρία. Αρκεί να κοιταχτούμε στον καθρέφτη, για να δούμε ένα κλασσικό παράδειγμα συμμετρίας (και ίσως ομορφιάς): Αν φανταστεί κανείς μια κατακόρυφη ευθεία γραμμή να περνά από τη άκρη της μύτης μας, τότε τα εξωτερικά χαρακτηριστικά του σώματος μας και στα δύο μέρη που η ευθεία μας έχει χωρίσει ταυτίζονται. Όχι μόνο έχουμε δύο μάτια, δύο χέρια κτλ αλλά επιπλέον αυτά είναι όμοια, σαν να είναι το ένα είδωλο του άλλου, δηλαδή να έχει προκύψει το ένα από το άλλο με τη διαδικασία που τεχνικά λέγεται κατοπτρισμός.

Κάθε σχεδόν χαρακτηριστικό που υπάρχει στο ένα "μισό" του σώματος μας, βρίσκεται και στο άλλο. Αυτή η συμμετρία του αριστερού και του δεξιού λέγεται αμφίπλευρη συμμετρία. Το ίδιο συμβαίνει, όχι μόνο στο ανώτερο θηλαστικό, αλλά σε όλα τα θηλαστικά και γενικά σε πολλά από τα έμβια όντα. Φαίνεται, λοιπόν, ότι η αμφίπλευρη συμμετρία είναι μια αρχή στη φύση, τουλάχιστον όσον αφορά τη ζωή, την κίνηση. Την ίδια παρατήρηση πρέπει να έκαναν οι άνθρωποι χιλιάδες χρόνια πριν, γι' αυτό παρατηρείται σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς η χρήση της αρχής αυτής στην τέχνη: ζωγραφική, ψηφιδωτά, γλυπτική, αρχιτεκτονική, ναυπηγική. Επιπλέον, όταν κάποιοι αναπτύχθηκαν περισσότερο, όπως ο κλασσικός ελληνικός πολιτισμός, η συμμετρία έπαιξε σημαντικό ρόλο στην επιστήμη: στην κοσμολογία, στα μαθηματικά, στην φυσική. Αυτή η εργασία θα κινηθεί σε δύο κυρίως κατευθύνσεις. Η πρώτη θα περιγράφει, όσο είναι δυνατόν, την εμπλοκή της συμμετρίας στην ανθρώπινη τέχνη και στο επίπεδο, ενώ η δεύτερη κατεύθυνση θα σκιαγραφεί την εμφάνιση των διάφορων ειδών συμμετρίας στη τέχνη της φύσης και στο χώρο.

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΗ - ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ως προς τη χρήση της συμμετρίας στην τέχνη, τα παραδείγματα είναι πάρα πολλά. Ξεκινάμε από την αρχαιότητα και τις προσπάθειες των καλλιτεχνών να αναπαραστήσουν τον άνθρωπο, που προϋπέθετε την κατανόηση των αναλογιών του κορμιού. Στη παράπλευρη φωτογραφία παρατηρούμε ένα θαυμάσιο δείγμα από αυτά. Πρόκειται για τον "Δορυφόρο", ένα άγαλμα του 5ου αιώνα π.Χ. στο οποίο παρίσταται αθλητής να φέρει δόρυ. Είναι ρωμαϊκό αντίγραφο έργου του φημισμένου γλύπτη Πολύκλειτου (5ος αιώνας π.Χ.) από το Άργος και είναι επίσης γνωστό ως "Κανών", γιατί είχε τέλειες αναλογίες και χρησιμοποιούνταν ως παράδειγμα από άλλους γλύπτες, αλλά και στο ομώνυμο βιβλίο του Πολύκλειτου, στο οποίο πραγματεύεται τις ιδεώδεις μαθηματικές αναλογίες για τα μέρη ενός ανθρώπινου σώματος και προτείνει για τη γλυπτική ανθρώπινων μορφών μια δυναμική αντιστάθμιση μεταξύ των χαλαρωμένων και τεταμένων μελών και μεταξύ των διευθύνσεων στις οποίες κινούνται τα μέλη αυτά. [B-B]

Αυτή η γενική αρχή λεγόταν συμμετρία στην αρχαία Ελλάδα, και τα αγάλματα νέων αθλητών του Πολύκλειτου, ισορροπημένα, εν ρυθμό και εξόχως λεπτομερή ήταν άριστα υποδείγματα των ιδεών του. Ο Πολύκλειτος είναι ο πρώτος που γνωρίζουμε να αναφέρει τη συμμετρία ως έννοια η οποία έχει μαθηματικό υπόστρωμα. Συγκεκριμένα, του αποδίδεται η φράση: "η χρήση πάρα πολλών αριθμών σχεδόν πάντα θα προκαλούσε ακρίβεια στην γλυπτική" [B-1, σελ 18]. Στον Δορυφόρο του, παρατηρούμε στην πράξη εφαρμοσμένες τις απόψεις του Πολύκλειτου περί συμμετρίας του σώματος. Ακόμη, εάν θέλαμε να εμβαθύνουμε λίγο στην τέχνη του, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε την κίνηση του σώματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα Είναι η ελεύθερη χρήση του contrapposto, που είναι η καλλιτεχνική αναπαράσταση του σώματος σαν να ελίσσεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, και η οποία βοήθησε την ελληνική γλυπτική να ελευθερωθεί από την παράδοση των αυστηρά μετωπικών και ευθυτενών αγαλμάτων. [B-B]

Ένας σύγχρονος του Πολύκλειτου και του Φειδία, ήταν ο Μύρωνας (480-440 π.Χ.)που θεωρούταν από τους αρχαίους σαν ο πλέον πολύπλευρος και πρωτοποριακός από όλους του Αττικούς γλύπτες.. Ο ιστορικός του 1ου μ.Χ. αιώνα Πλίνιος αναφέρει τον Μύρωνα σαν τον πρώτο που κατάφερε ζωντανές αναπαραστάσεις στην τέχνη, αν και είναι πιο ακριβές να πούμε πως ήταν ο πρώτος Έλληνας γλύπτης που συνδύασε την αριστοτεχνία της κίνησης με το χάρισμα της αρμονικής σύνθεσης.[B-B] Δούλεψε κυρίως με μπρούτζο και ήταν γνωστός για τις πολλές μελέτες αθλητών εν κινήσει. Από τα πάμπολλα έργα του, δύο μόνο αναπαραστάσεις σίγουρα επέζησαν, από τις οποίες φημισμένη είναι ο Δισκοβόλος, που χρονολογείται από το 450 π.Χ., σε μαρμάρινα αντίγραφα της ρωμαϊκής εποχής. Το καλύτερο αντίγραφο του Δισκοβόλου βρίσκεται στο Εθνικό Ρωμαϊκό Μουσείο.

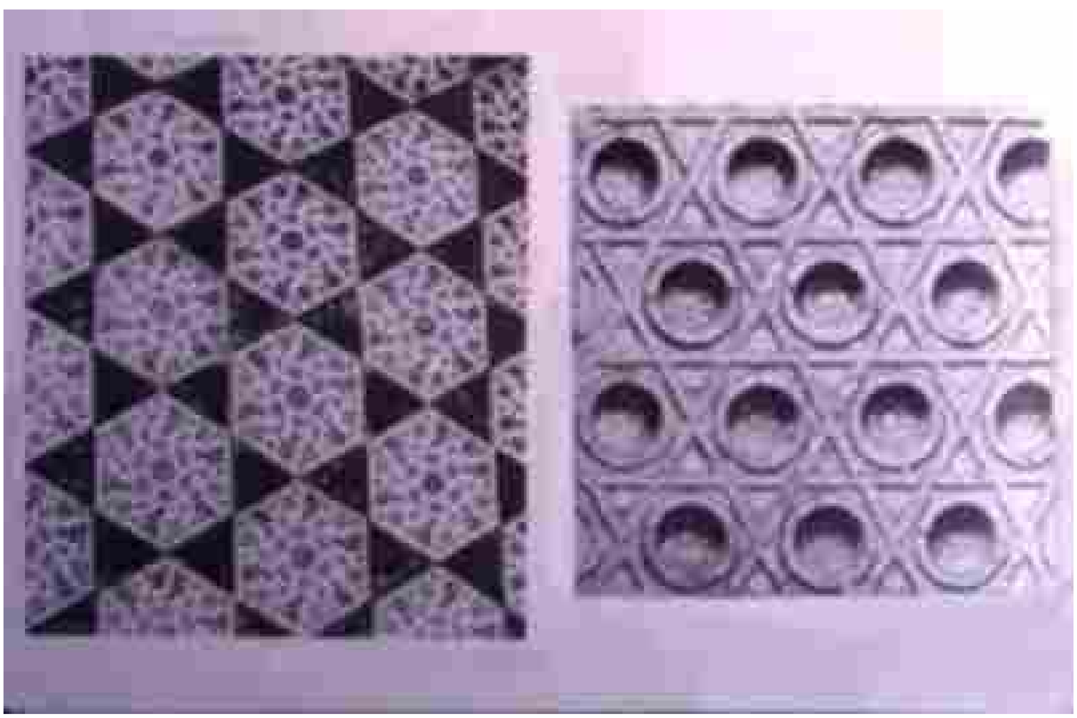
Και στα δύο σωζόμενα έργα του, ο Μύρων έχει συλλάβει την στιγμή ακινησίας στην οποία μια κίνηση μόλις έχει τελειώσει και μια άλλη πρόκειται να ξεκινήσει. Ο Δισκοβόλος για παράδειγμα έχει μόλις ολοκληρώσει την κίνηση από πίσω προς τα εμπρός πριν ακριβώς πετάξει το δίσκο.

Μαθητής, κατά κάποιο τρόπο του Πολύκλειτου ήταν ένας ακόμη μεγάλος γλύπτης της αρχαιότητας, ο Λύσιππος του 4ου αιώνα π.Χ., αρχηγός της σχολής του Άργους και της Σικυών, στα χρόνια του Φιλίππου του Μακεδόνα και ιδιαίτερα παραγωγικός κατά τη βασιλεία του Αλεξάνδρου του Μεγάλου (4ος αιώνας) Ο Λύσιππος φημιζόταν για τις νέες και λεπτεπίλεπτες αναλογίες των γλυπτών του και τον ζωντανό νατουραλισμό τους. [B-B] Αρχικά εργάτης του μετάλλου, ο Λύσιππος αυτοδιδάχθηκε την τέχνη της γλυπτικής μελετώντας τη Φύση και τον Δορυφόρο του Πολύκλειτου, του οποίου τον κανόνα των ιδεατών αναλογιών τροποποίησε δημιουργώντας μορφές με μικρότερο κεφάλι και λεπτότερο κορμό που αύξησε το φαινομενικό ύψος τους. Ο Πλίνιος ο Γηραιός (1ος αιώνας μ.Χ.) του αποδίδει πάνω από 1500 έργα, όλα μπρούτζινα. Κανένα από αυτά δεν διασώθηκε ούτε υπάρχει κάποιο απολύτως αξιόπιστο αντίγραφο. Υπάρχουν, πάντως κάποια αντίγραφα που είναι δυνατόν να του αποδοθούν με κάποια σχετική σιγουριά.. Το καλύτερο και το πλέον αξιόπιστο από αυτά είναι ο Αποξυόμενος, ένας νέος αθλητής που τρίβει (ξύνει) και καθαρίζει το δέρμα του από το λάδι. Το αντίγραφο αυτό που βρίσκεται στο μουσείο του Βατικανού είναι ψηλό, λεπτό και κομψό στη διάπλαση με το κεφάλι μικρό σε σχέση με το σώμα. Έμφαση έχει δοθεί στη λεπτομέρεια στα μάτια και στα μαλλιά. [Β-Β]

Οι Πυθαγόρειοι, δηλαδή οι οπαδοί της φιλοσοφικής σχολής (και μυστηριακής λατρείας του Απόλλωνα και των Μουσών) που πρωτοιδρύθηκε στον Κρότωνα της Ιταλίας το 525 π.Χ. από τον Πυθαγόρα τον Σάμιο [Β-Β], θεωρούσαν ότι ο κύκλος στο επίπεδο και η σφαίρα στο χώρο είναι τα τελειότερα γεωμετρικά σχήματα, ακριβώς λόγω των συμμετριών τους. Ο Φιλόσοφος, προσωνύμιο του Αριστοτέλη [384-322 π.Χ.] για τον ίδιο λόγο έδωσε σφαιρικό σχήμα στα ουράνια σώματα γιατί οτιδήποτε άλλο θα μείωνε την τελειότητά τους. Άλλες αναφορές στη έννοια συμμετρία συναντάμε έμμεσα στα "Ηθικά Νικομάχεια" του Αριστοτέλη ως το "μέσο μέτρον", το σκοπό για τον οποίο θα πρέπει ο ενάρετος να αγωνίζεται με τις πράξεις του. Για το ίδιο θέμα, ο Γαληνός της Περγάμου (129 - 216 μ.Χ.), έλληνας φυσιολόγος, συγγραφέας και φιλόσοφος που άσκησε μεγάλη επιρροή στη ιατρική θεωρία και πρακτική στην Ευρώπη από το Μεσαίωνα μέχρι τα μέσα του 17ου αιώνα, στο βιβλίο του Περί Κράσεων γράφει: *"σύμμετρον όπερ εκατέρου των άκρων απέχει",* δηλαδή την κατάσταση του νου που ισαπέχει από τα άκρα. [Β-1, σελ 18]

Ο Πάππος της Αλεξάνδρειας (3ος αιώνας μ.Χ.), ο τελευταίος μεγάλος Έλληνας μαθηματικός της αρχαιότητας. στη Συναγωγή του, ένα συστηματικό μαθηματικό έργο του 340 μ.Χ. χωρισμένο σε 8 βιβλία, εξαίρει τις γεωμετρικές γνώσεις των μελισσών, για τη σοφία τους να χτίζουν τις κερήθρες τους εξαγωνικές, περικλείοντας έτσι το μέγιστο δυνατό όγκο με την ελάχιστη δυνατή περίμετρο μεταξύ των πλακοστρώσεων του επιπέδου με κανονικά πολύγωνα.. [B-B & B-1, σελ 117]. Αργότερα, θα ασχοληθούμε με τα κανονικά πολύγωνα και θα σκιαγραφήσουμε τις δυνατές συμμετρίες τους. Πάντως, προς το παρόν αρκεί να διαισθάνεται κανείς τη συμμετρικότητα του κανονικού εξαγώνου και φυσικά, να πιστέψει ότι όντως οι μέλισσες εξασφαλίζουν μέγιστη χωρητικότητα των κελιών τους. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε ένα συμμετρικό σχέδιο, το εξάγωνο-κυψέλη, και μια εφαρμογή του ή ένα πλεονέκτημα από αυτήν, τη μέγιστη χωρητικότητα. Οπότε εισάγεται εύλογα η έννοια της μαθηματικής συμμετρίας εφαρμοσμένης πέρα από την καθαρά αισθητική της σημασία.

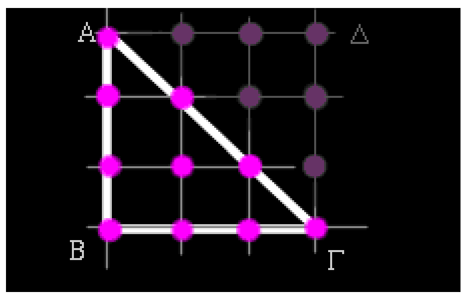
Διάφοροι πολιτισμοί και λαοί, όπως οι Σουμέριοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Πέρσες, οι Ισραηλίτες, οι Αιγύπτιοι, οι Ρωμαίοι έχουν αφήσει έργα τέχνης ή απομεινάρια τους που μας δείχνουν ότι κατείχαν καλά τα μυστικά της συμμετρίας, και ειδικότερα της αυστηρής αμφίπλευρης (εραλδικής) συμμετρίας. Σουμερικά αγγεία, εικόνες με δικέφαλους αετούς και βαβυλωνιακές πέτρινες σφραγίδες, περσικά ψηφιδωτά με σφίγγες από την εποχή της μάχης του Μαραθώνα αποδεικνύουν του λόγου το αληθές . Στις φωτογραφίες, φαίνονται λεπτομέρειες από αραβικά ψηφιδωτά και ανάγλυφα, που εμφανίζουν πολλών ειδών συμμετρίες, όπως αμφίπλευρη, περιστροφική και μεταφορική.



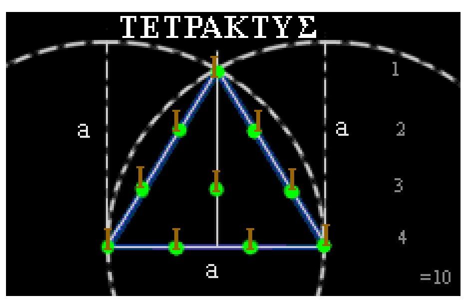
Στην παρακάτω φωτογραφία [Bi-1] βλέπουμε ένα τεχνούργημα με μορφή δίσκου από την Πομπηία, το οποίο διακρίνεται για την πολλαπλή αμφίπλευρη συμμετρία του. Μπορούμε να φέρουμε 12 διαμετρικούς άξονες ως προς τους οποίους το αντικείμενο παρουσιάζει αμφίπλευρη συμμετρία. Επίσης, ας σημειώσουμε ότι εάν το περιστρέψουμε κατά πολλαπλάσια της γωνίας των 60 μοιρών το αντικείμενο φαίνεται να μένει αναλλοίωτο. Αυτό είναι ένα ακόμη είδος συμμετρίας, η περιστροφική. Τέλος, παρατηρούμε ότι αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, ρόμβους καθώς και ένα κεντρικό εξάγωνο

ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ ΣΤΗ ΜΑΓΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

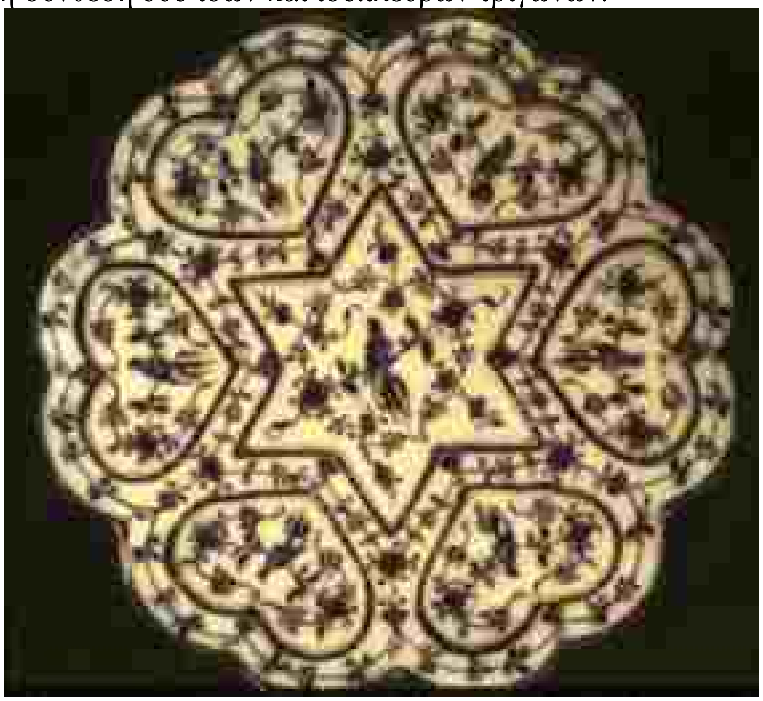
Σε αυτό το σημείο, πριν προχωρήσουμε, είναι απαραίτητο να αναφέρουμε μερικά εισαγωγικά στοιχεία σχετικά με τα πολύγωνα και τους αριθμούς στην αρχαιότητα.. Ένα πολύγωνο είναι ένα σύνολο τριών και άνω σημείων που ενώνονται μεταξύ τους με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, καλούμενα πλευρές, που σχηματίζουν μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή. Τα σημεία στα οποία ενώνονται οι πλευρές λέγονται κορυφές και οι γωνίες που σχηματίζουν δυο συνεχόμενες πλευρές λέγονται εσωτερικές γωνίες. Για παράδειγμα, το τρίγωνο είναι ένα πολύγωνο. Η κατηγορία των πολυγώνων που θα ασχοληθούμε εμείς είναι τα κανονικά πολύγωνα, δηλαδή εκείνα στα οποία όλες οι πλευρές και οι εσωτερικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Δυο παραδείγματα κανονικών πολυγώνων είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο. Τα κανονικά πολύγωνα είναι προφανώς άπειρα και έχουν όλα αμφίπλευρη συμμετρία. Για παράδειγμα, το ισόπλευρο τρίγωνο είναι αμφίπλευρα συμμετρικό ως προς τα τρία ύψη του. Ακόμη έχει περιστροφική συμμετρία ως προς τα πολλαπλάσια των 120 μοιρών. Γενικά, τα πολύγωνα μας είναι γνωστά από την αρχαιότητα. [Στην πραγματικότητα, αυτό που θα επιχειρήσουμε να δείξουμε εν μέρει είναι πως τα περισσότερα ήταν γνωστά και εφαρμόσιμα από πολύ παλιά.] Είναι γνωστό ότι στην αρχαιότητα ορισμένοι αριθμοί είχαν ιδιαίτερο συμβολικό νόημα πέρα από την καθαρά πρακτική τους χρήση. Επιπλέον κάθε αριθμός μπορούσε να αντιστοιχηθεί με ένα επίπεδο σχήμα, ένα πολύγωνο, φέρ' ειπείν το τρία στο τρίγωνο, το τέσσερα στο τετράγωνο κοκ. Για την ακρίβεια, η ιδέα της αντιστοίχησης αριθμών σε επίπεδα σχήματα προέρχεται από τους πρώιμους Πυθαγόρειους που συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με σχέδια από τελείες γεγονός που με τη σειρά του ίσως να προέκυψε από τα χαλίκια που χρησιμοποιούνταν για την μέτρηση αλλά και την αναπαράσταση σχημάτων παλαιότερα. Για παράδειγμα, δεκάξι χαλίκια μπορούν να διευθετηθούν σε τέσσερις γραμμές από τέσσερα στην καθεμία, σχηματίζοντας ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα, οπότε ο αριθμός , αναπαρίσταται από ένα τετράγωνο. Με παρόμοιο τρόπο, δέκα χαλίκια τίθενται σε τέσσερις γραμμές, με την 1η γραμμή να περιέχει μόνο ένα χαλίκι, την 2η δύο, την 3η τρία και την 4η τέσσερα, σχηματίζοντας το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος.



Οι αριθμοί οι οποίοι αναπαρίστανται με αυτόν τον τρόπο από τρίγωνα λέγονταν τριγωνικοί, ενώ εκείνοι που παριστάνονταν από τετράγωνα λεγόντουσαν τετραγωνικοί. Ένας τριγωνικός αριθμός με βαρύνουσα σημασία στους Πυθαγόρειους ήταν η δεκάδα, το 10 (=1+2+3+4), του οποίου η σχηματική αναπαράσταση είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όπως στο σχήμα:



Ο αριθμός αυτός ήταν η Τετρακτύς των Πυθαγόρειων (η λέξη αποδίδεται στο Θέωνα, μαθηματικό και αστρονόμο του 1ου αιώνα π.Χ.), που σήμαινε ένα σύνολο τεσσάρων πραγμάτων και είχε ρόλο "πασπαρτού" στη φιλοσοφία τους από την μουσική των σφαιρών μέχρι την φιλοσοφία Η τετρακτύς δηλαδή η δεκάδα έλκει την σήμανσή της την καταγωγή της πιθανότατα από το γεγονός ότι έχουμε 10 δάκτυλα Επιπλέον οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν 10 τέτοια σύνολα. [Bi-1] Από τα προαναφερθέντα προκύπτουν σχέσεις μεταξύ των αριθμών και των αντιστοιχούντων σε αυτούς σχημάτων. Για παράδειγμα ένα τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα και ισοσκελή τρίγωνα από μια διαγώνιο του. Άρα, το συμπέρασμα θα ισχύει και για τους αντίστοιχους αριθμούς: Κάθε τετραγωνικός αριθμός είναι το άθροισμα δύο τριγωνικών. Για παράδειγμα, ο τετραγωνικός αριθμός 25 είναι άθροισμα του 10 και του 15. Γενικότερα, κάθε ένα από αυτά τα πολύγωνα είχε συμβολική σημασία και ορισμένα από αυτά εμφανίζονται σε καλλιτεχνικά μοτίβα ή ως αρχιτεκτονικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, το "Αστέρι του Δαυίδ", Ισραηλιτικό εθνικό σύμβολο, είναι φορέας πολλών ειδών συμμετρίας, συμπεριλαμβανομένης της εραλδικής - αμφίπλευρης, όπως φαίνεται στην φωτογραφία [Bi-1]. Αν προσέξει κανείς το Αστέρι το Δαυίδ (ή εξάλφα), θα παρατηρήσει ότι πρόκειται για τη σύνθεση δύο ίσων και ισόπλευρων τριγώνων.



Στο 3ο κεφάλαιο συζητάμε την εμφάνιση της συμμετρίας στην τέχνη από την αρχαιότητα ως σήμερα και παραθέτουμε αρκετές φωτογραφίες και εικόνες.

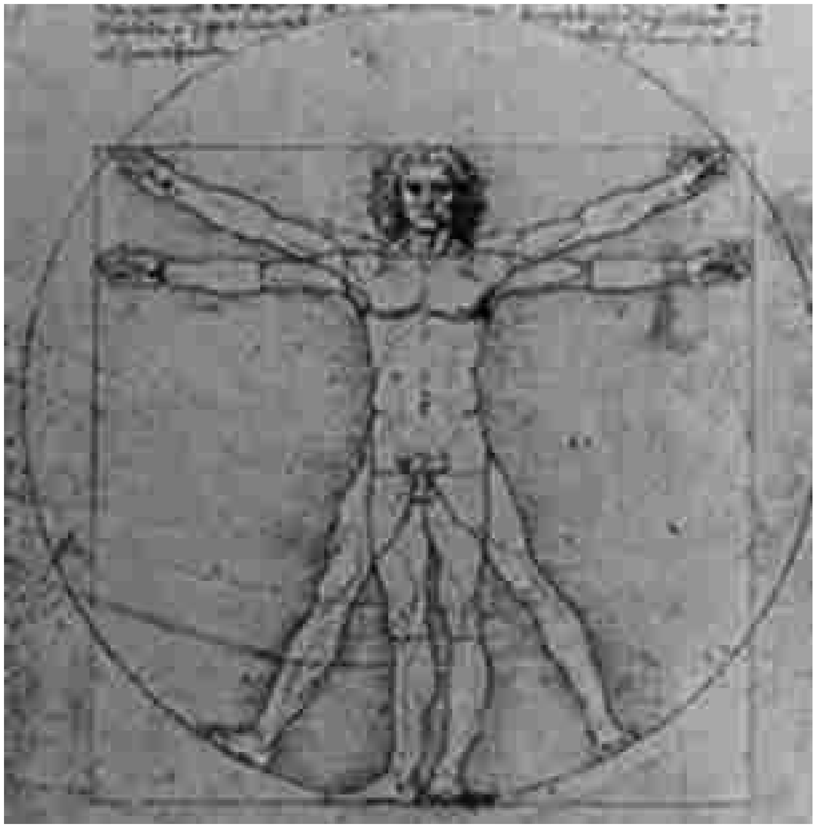
Η ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Η χρήση της συμμετρίας κυρίως για αισθητικούς λόγους έφτασε στο απόγειο της κατά την περίοδο της Αναγέννησης. Φημισμένοι καλλιτέχνες, μαθηματικοί και αστρονόμοι, μελέτησαν τα αρχαιοελληνικά κυρίως μαθηματικά κείμενα, αλλά και οποιοδήποτε απομεινάρι αρχαίας σοφίας και αναζήτησαν την ομορφιά στη γνώση των αρχαίου πνεύματος. Συχνά αναφέρονται ως καλλιτέχνες-γεωμέτρες, λόγω της εκτεταμένης χρήσης γεωμετρίας στη δημιουργία των έργων τους. Στα τέλη του Μεσαίωνα, ο Γερμανός Albrecht Durer (1471, Nurnberg - 1528, Nurnberg), ακολουθώντας τα βήματα του Πολύκλειτου θα δώσει ένα κανόνα για τις αρμονικές ανθρώπινες αναλογίες με την πραγματεία του Vier Bucher von menschlicher Proportion [Τα τέσσερα βιβλία των ανθρώπινων αναλογιών] του 1528. Βέβαια ο ίδιος δεν χρησιμοποιεί το όρο συμμετρία αλλά η λατινική μετάφραση De Symmetria partium του 1532 από τον φίλο του ουμανιστή και θεολόγο Joachim Camerarius, [Β-1, σελ. 18] Ο Durer ζωγράφος και χαράκτης που γενικά θεωρείται ο μεγαλύτερος Γερμανός καλλιτέχνης της Αναγέννησης, κατά τη περίοδο της ωρίμανσης της τέχνης του, επηρεάστηκε από την Ιταλική Αναγεννησιακή σχολή. Ειδικότερα, από ένα άσημο Βενετό ζωγράφο τον Jacopo de' Barbari, που ενδιαφερόταν να βρει τη γεωμετρική οδό για την αντιγραφή των ανθρώπινων αναλογιών. Πιθανότατα χάρη στη επιρροή του de' Barbari, ο Durer γύρω στα 1500 ενασχολήθηκε με το πρόβλημα αυτό των ανθρώπινων αναλογιών και της συμμετρίας του κορμιού με πιο εκφραστική από όλες τις προσπάθειές του το χαρακτικό "Αδάμ και Εύα" του 1504. Όπως λέγεται, στο έργο αυτό κατάφερε να δαμάσει το μυστήριο της ανθρώπινης ομορφιάς σε μια πνευματικά υπολογισμένη ιδεατή μορφή. [Β-Β]. Σε μια κριτική για το συγκεκριμένο έργο διαβάζουμε: "Δεν είναι εύκολο για εμάς να καταλάβουμε αμέσως το επίτευγμα που υπάρχει σε αυτό το χαρακτικό. Διότι ο καλλιτέχνης μιλάει μια γλώσσα που του είναι λιγότερο οικεία από την καθομιλουμένη καλλιτεχνική του γλώσσα.. Οι αρμονικές μορφές στις οποίες έφτασε μετρώντας σταθερά για να βρει την ισορροπία με κανόνα και διαβήτη δεν είναι τόσο πειστικές και όμορφες όσο τα ιταλικά και αναγεννησιακά μοντέλα. Υποβόσκει μια κάποια ελαφρά γεύση τεχνητού όχι μόνο ση μορφή και στη θέση αλλά και στη συμμετρική τους σύνθεση".

Durer "Αδάμ και Εύα", χαρακτικό (1504)

Μιλώντας πριν για τον Durer και την ενασχόλησή του με τη συμμετρία του ανθρώπινου σώματος, αναφέραμε ως κύρια επιρροή του, τον ζωγράφο Jacopo de' Barbari. Σε ένα πίνακα του de' Barbari, έργο του 1495 (1499) του οποίου μια φωτογραφία υπάρχει παραπάνω, εικονίζεται ένας μαθηματικός του 15ου αιώνα, ο Luca Paccioli (1445 - 1514, ή "Paciolo"), φραγκισκανός μοναχός, μαζί με ένα πλήθος από όργανα και εργαλεία της γεωμετρίας (πίνακα, κιμωλία, διαβήτη, τα Στοιχεία του Ευκλείδη κ.α.) να υποδεικνύει στον πίνακα ένα θεώρημα της γεωμετρίας. Παρατηρεί κανείς στα κάτω δεξιά του πίνακα ένα μικρό μοντέλο ενός κανονικού πολύεδρου που λέγεται δωδεκάεδρο, καθώς επίσης και το γυάλινο μοντέλο ενός πολύ μεγαλύτερου πολύεδρου, επάνω αριστερά, μισογεμισμένου νερό. Βάσει αυτών των στοιχείων που περιλαμβάνει, θεωρείται ότι το έργο αυτό αποτελεί επιτομή της στενής σχέσης των μαθηματικών με την τέχνη της Αναγέννησης. Η νεανική φιγούρα δίπλα στον Paccioli ίσως να είναι ο μαθητής του Guidobaldo, Δούκας του Urbino, [Bi-1] ή κατά τον N. MacKinnon να είναι ο ίδιος ο Durer. [Bi-2]. Ο Paccioli μελέτησε τις ιδανικές αναλογίες που πρέπει να έχει ένα σχήμα για να είναι αισθητικά επαρκές, όμορφο. Τα αποτελέσματα τα έκδωσε στην πραγματεία του Da Divina Proportione [Θεία Αναλογία] το 1509, η οποία επηρέασε τον Leonardo DaVinci, που έκανε και τα σχέδια για το βιβλίο, αλλά και τον Durer. Αυτή η ιδανική αναλογία είναι γνωστή από την αρχαιότητα και καλείται χρυσή τομή. Η ιδέα των γεωμετρικών αναλογιών είναι πιθανότατα πυθαγόρειας προέλευσης, αν και δεν είναι απόλυτα σίγουρο για τη χρυσή τομή συγκεκριμένα αν έχει τις ρίζες στους πρώτους Πυθαγόρειους. (6ος - 5ος αιώνας π.Χ.) [B-B]. Γενικά, η χρυσή τομή εκφράζει την ιδέα ότι κάτι χωρίζεται σε δύο τμήματα τέτοια ώστε ο λόγος του μικρότερου προς το μεγαλύτερο να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το ολόκληρο. Από που προκύπτει αυτό; Θα πρέπει να καταφύγουμε στην αρχαιότητα, στις μελέτες για τις ιδανικές αναλογίες του ανθρώπινου σώματος. Είδαμε στην αρχή της ιστορικής αναδρομής ότι αρκετοί γλύπτες, και κυρίως ο Πολύκλειτος που δημιούργησε τον Κανόνα του, ασχολήθηκαν με το ίδιο αντικείμενο με σκοπό να αποδώσουν την ζωντάνια και την κίνηση στα έργα τους. Όμως, ελάχιστα έχουν σωθεί από αυτούς.

Οι πρώτες γραπτές πληροφορίες για τη συμμετρία του ανθρώπου και τη χρυσή τομή μας έρχονται από έναν αρχιτέκτονα της Ρώμης. Ο Βιτρούβιος, [MARCUS VITRUVIUS POLLIO] (1ος αιώνας π.Χ.), Ρωμαίος αρχιτέκτονας και μηχανικός, έγραψε την πραγματεία De architectura (Περί Αρχιτεκτονικής), όπου βασιζόμενος στην εμπειρία του αλλά και σε θεωρητικά έργα Ελλήνων αρχιτεκτόνων όπως ο Ερμογένης, καλύπτει σχεδόν κάθε όψη της μέχρι τότε αρχιτεκτονικής, της πολεοδομίας, της κατασκευής ναών και δημόσιων κτιρίων, και τη χρήση των σχετικών ελληνικών κλασσικών αξιών σε 10 βιβλία. Ανάμεσα στα άλλα ο Βιτρούβιος πραγματεύεται και τις αναλογίες του ανθρώπινου κορμιού:
"οι διαστάσεις του ανθρώπινου κορμιού κατανέμονται από την Φύση ως εξής: 4 δάχτυλα δίνουν μια παλάμη, και 4 παλάμες 1 πόδι. 6 παλάμες δίνουν ένα πήχη (18 ίντσες) και 4 πήχεις δίνουν το ύψος ενός ανθρώπου (72 x 2,54 =182,88 εκ.). Και 4 πήχεις κάνουν ένα βήμα, και 24 παλάμες δίνουν πάλι το ύψος του ανθρώπου και αυτές τις μετρήσεις χρησιμοποίησε στα κτίριά του. Εάν ανοίξεις τα πόδια σου τόσο ώστε να περιορίσεις το ύψος σου κατά 1/14 και απλώσεις και υψώσεις τα χέρια σου μέχρι οι μέσοι (δάκτυλα) αγγίξουν το επίπεδο της κορυφής του κεφαλιού σου, πρέπει να γνωρίζεις ότι το κέντρο των απλωμένων μελών σου θα είναι στον αφαλό σου και το κενό ανάμεσα στα πόδια σου θα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Το μήκος των απλωμένων χεριών ενός ανθρώπου ισούται με το ύψος του. Από τις ρίζες των μαλλιών μέχρι τη βάση του πηγουνιού είναι το ένα δέκατο του ύψους. Από τη βάση του πηγουνιού ως την κορυφή του κεφαλιού είναι το ένα όγδοο του ανθρώπινου ύψους, ενώ από την κορυφή του στήθους ως την κορυφή του κεφαλιού θα είναι το ένα έκτο του ανθρώπου. Από την κορυφή του στήθους ως τις ρίζες των μαλλιών είναι το έβδομο μέρος του ολόκληρου ανθρώπου. Από τις θηλές του στήθους ως την κορυφή του κεφαλιού είναι το τέταρτο μέρος ενός ανθρώπου. Το μεγαλύτερο πλάτος των ώμων περιέχει το ένα τέταρτο μέρος του ανθρώπου. Από τον αγκώνα έως την άκρη του χεριού είναι το ένα πέμπτο του ύψους, και από τον αγκώνα έως τη γωνία της μασχάλης είναι το ένα όγδοο του. Ολόκληρο το χέρι είναι το ένα δέκατο μέρος του ανθρώπου, ενώ η αρχή των γεννητικών οργάνων είναι το μέσο του κορμού. Το πόδι είναι το ένα έβδομο μέρος του ανθρώπου. Από το πέλμα του ποδιού ως κάτω από το γόνατο είναι το ένα τέταρτο μέρος του ανθρώπου. Από κάτω από το γόνατο έως την αρχή των γεννητικών οργάνων είναι το τέταρτο του ανθρώπου. Η απόσταση από τη βάση του πηγουνιού ως τη μύτη και από τις ρίζες των μαλλιών ως τα φρύδια είναι η ίδια και όπως το αυτί είναι το ένα τρίτο του προσώπου." [B-8, σελ 182-3] Τα προηγούμενα ήταν η πλήρης μετάφραση του κειμένου που συνοδεύει το έργο του Leonardo DaVinci "Vitruvian Man", της φωτογραφίας.



Στην πραγματικότητα όμως είναι μετάφραση του Βιτρούβιου, αφού το σχέδιο του Leonardo ήταν αρχικά εικόνα για βιβλίο σχετικά με το έργο του Βιτρούβιου. Αυτό που αξίζει να προσέξουμε στα γραπτά του Βιτρούβιου ήταν η παρατήρηση σχετικά με τα ανθρώπινα χέρια. Γράφει πως το μήκος από τον αγκώνα ως την γωνία της μασχάλης είναι 1/8 του ύψους ενώ από τον αγκώνα ως την άκρη των δακτύλων είναι το 1/5. Αν τα προσθέσουμε έχουμε ότι το συνολικό μήκος του από τη μασχάλη ως την άκρη του χεριού είναι 14/40 του ύψους. Αν πάρουμε το λόγο του μικρότερου μέρους προς μεγαλύτερο, 5/8 και στη συνέχεια αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο (1/5) με το συνολικό μήκος του χεριού θα έχουμε (1/5)/(13/40)=40/65==5/8 .□ρα η χρυσή τομή των αρχαίων είναι όχι μια επινόηση αλλά μια παρατήρηση των αναλογιών του (ιδανικού) ανθρώπινου σώματος. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληγε και ο Paccioli στην Θεία Αναλογία του: τη διαίρεση ενός τμήματος σε δύο μέρη a, b έτσι ώστε η αναλογία του μικρότερου μέρους, έστω a, προς το μεγαλύτερο, το b, να είναι ίση με την αναλογία του b προς όλο το τμήμα, a + b, δηλαδή: a/b=b/a+b Η εξίσωση αυτή πέραν της χρυσής τομής έχει και μια άλλη εξίσου ενδιαφέρουσα "ανάγνωση". Αν θέσουμε , και αντικαταστήσουμε στην "Θεία Αναλογία", τότε θα πάρουμε: x^2+x-1=0 . Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα 5 και λύσεις (1+ROOT(5))/2=1.618= Φ που λέγεται και χρυσός αριθμός (χρυσός λόγος) και (1-ROOT(5))/2=1-Φ που είναι ο συμμετρικός του. Συμβολίζουμε το χρυσό λόγο-χρυσό αριθμό με Φ, από το αρχικό του Φειδία (490-430 π.Χ.), του φημισμένου γλύπτη που διεύθυνε την κατασκευή του Παρθενώνα. .Ο χρυσός λόγος χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στην αρχιτεκτονική. Μια άλλη μαθηματική του χρήση είναι στην γεννήτρια των αριθμών Fibonacci: Xν=(1/ROOT(5))*(Φ^ν-(1-Φ)^ν) (Eduard Lucas)

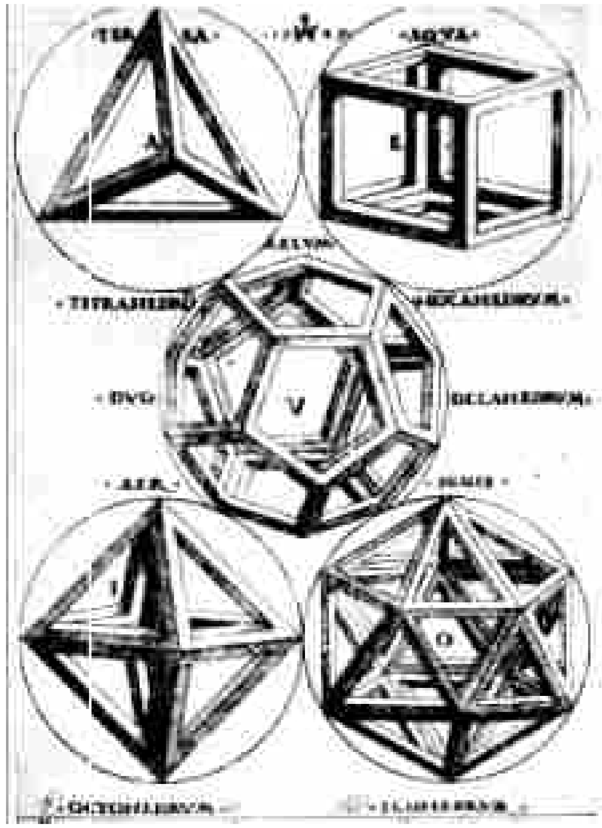
Γενικά, κάθε όρος στην ακολουθία Fibonacci προκύπτει από το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων ξεκινώντας από δύο άσσους, δηλαδή έχει γενικό τύπο Χν=Χν-1+Χν-2, οπότε οι πρώτοι δώδεκα όροι της είναι: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144. Παρατηρούμε ότι ο λόγος των δύο τελευταίων όρων της ακολουθίας τείνει προς το Φ, αφού 3/5=0.6, 8/13=0.615 και 89/144=0.6180555□ .

Επιστρέφοντας στο χρυσό αριθμό, ένα παραλληλόγραμμο που η μικρή προς τη μεγάλη του πλευρά είναι σε λόγο Φ κατά προσέγγιση δηλαδή 3/5 ή 5/8 κοκ, λέγεται χρυσό παραλληλόγραμμο και θεωρείται να έχει τις αισθητικά καλύτερες αναλογίες. Σε ένα τέτοιο παραλληλόγραμμο, όπως στο σχήμα, είναι δυνατόν με χρήση της χρυσής τομής με κανόνα και διαβήτη να σχεδιάσουμε τη λογαριθμική σπείρα που όπως θα δούμε αργότερα είναι το αποτέλεσμα δύο συμμετριών.

Πράγματι, αν πάρουμε τη χρυσή τομή Ζ επί του τμήματος ΒΓ και σχηματίσουμε το ισόπλευρο τετράγωνο ΑΒΕΖ, τότε το κομμάτι που απομένει, δηλαδή το ΕΔΖΓ είναι πάλι ένα χρυσό παραλληλόγραμμο. Συνεχίζοντας, αν πάρουμε τη χρυσή τομή Θ επί της ΕΖ και σχηματίσουμε το αντίστοιχο τετράπλευρο ΕΔΗΘ, τότε πάλι το παραλληλόγραμμο ΖΓΗΘ θα είναι χρυσό. Συνεχίζουμε με την ίδια τακτική όσο γίνεται και κατόπιν σχεδιάζουμε τα κυκλικά τόξα που αντιστοιχούν σε κύκλους που έχουν κέντρα τις χρυσές τομές Ζ,Θ κτλ. Τα τόξα αυτά είναι συνεχόμενα και δίνουν την λογαριθμική σπείρα. Γίνεται ίσως κατανοητό, ότι η χρυσή τομή, άρα και η συμμετρία που αυτή συνεπάγεται, εμφανίζεται [σαν συνδετικός κρίκος] σε πολλά συσχετιζόμενα θέματα τόσο μαθηματικού περιεχομένου όπως με τους αριθμούς Fibonacci και την λογαριθμική σπείρα όσο και αισθητικής όπως η ομορφιά όσο και βιολογικού-φυσικού, όπως η φυλλοταξία, που είναι ένα φαινόμενο που παρατηρείται στη βοτανολογία., όπου για παράδειγμα η διάταξη των σπειρών σε κουκουνάρια ή των ανθυλλίων σε ηλίανθους ακολουθούν την ακολουθία Fibonacci ή την ακολουθία κλασμάτων: 1/1, ½, 2/3, 3/5, 5/8 κοκ Στην παρακάτω φωτογραφία βλέπουμε ένα παράδειγμα φυλλοταξίας. Είναι ένας από τους τρεις τρόπους διάταξης των φύλλων στα κλαδιά ενός δέντρου. Σε αυτόν το συγκεκριμένο τρόπο, τα φύλλα φύονται ένα προς ένα στο κλαδί και διατάσσονται έτσι ώστε να σχηματίζουν μια ανιούσα σπείρα.

ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΥΟ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

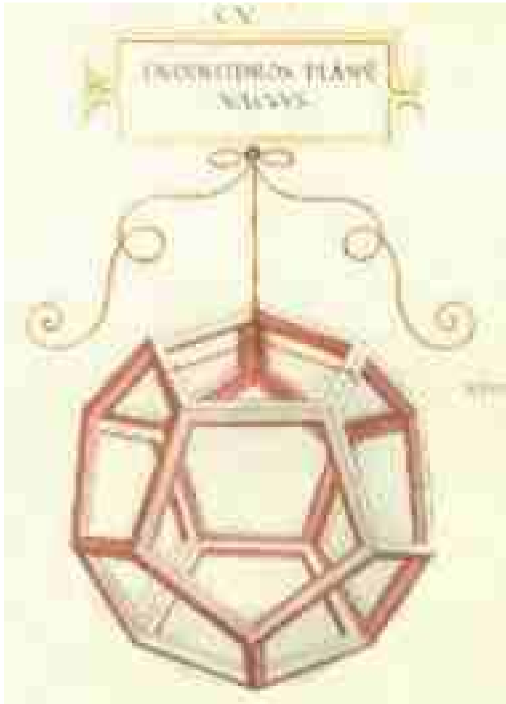
Παρατηρώντας τον πίνακα του de' Barbari που εικονίζει τον Paccioli επισημάναμε την ύπαρξη δυο στερεών σωμάτων που ονομάσαμε πολύεδρα. Το ένα ήταν ένα κανονικό πολύεδρο, το δωδεκάεδρο. Τα πολύεδρα, και ιδιαίτερα τα κανονικά τα αναφέρουμε σε αυτήν την εισαγωγή και εξετάζουμε εκτενώς αργότερα στο 4ο κεφάλαιο για τον απλούστατο λόγο ότι εμφανίζουν τρομερό ενδιαφέρον τόσο σε σχέση με τη συμμετρία και τα διάφορα είδη της όσο και για τη συσχέτιση τους με πολλά θέματα φυσικής αλλά και παραφυσικής. Στους πρώτους Πυθαγόρειους αποδίδεται από πολλούς η γνώση των κανονικών πολύεδρων αλλά και εμπειρικοί τρόποι κατασκευής τους. Ένα κανονικό πολύεδρο, όπως θα δούμε στο 4ο κεφάλαιο και μετά, είναι ένα κυρτό συνεχές στερεό που περικλείεται από ίσα κανονικά πολύγωνα, τις έδρες. Δηλαδή ένα πολύεδρο συντίθεται από κανονικά πολύγωνα, και θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι τα πολύεδρα ή κάποια από αυτά είναι τα γεωμετρικά αντίστοιχα μορφώματα στο χώρο των κανονικών πολυγώνων του επίπεδου. Υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά στερεά, το τετράεδρο, το εξάεδρο ή κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο και μια απόδειξη αυτού του γεγονότος δίνεται στο 4ο κεφάλαιο. Ο πρώτος που κάνει σαφή αναφορά στην ύπαρξη και στον τρόπο κατασκευής των κανονικών αυτών στερεών είναι ο Πλάτωνας (427 - 347 π.Χ.) γι' αυτό και συνήθως αποκαλούνται πλατωνικά στερεά.



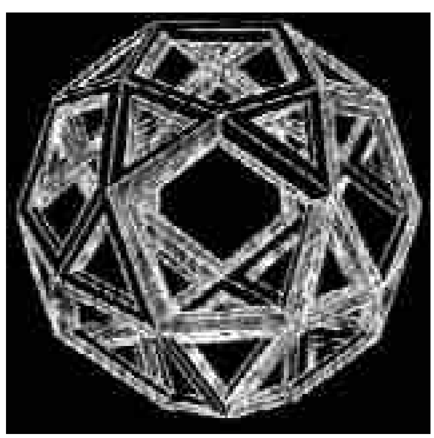
Στη φωτογραφία βλέπουμε και τα πέντε πλατωνικά στερεά σε μια αναπαράσταση του 1549 του Γερμανού γραφίστα Augustin Herschvogel (1503-1553). Στον διάλογό "Τίμαιος", ένα από τα τελευταία του έργα που συνήθως αναφέρεται μαζί με το μικρότερο "Κριτίας", ο Πλάτων αναπτύσσει την κοσμολογία του, σύμφωνα με την οποία η ύλη αποτελείται από τέσσερα βασικά στοιχεία: τη φωτιά, τη γη, τον αέρα και το νερό. Στον "Τίμαιο", τα πρωταρχικά μόρια καθενός εξ αυτών των στοιχείων έχουν το σχήμα ενός εκ των κανονικών πολυέδρων. Συγκεκριμένα, ο Πλάτων γράφει: Πρέπει να διαμοιράσουμε τα σχήματα (στερεά) που μόλις περιγράψαμε ανάμεσα στη φωτιά, τη γη, το νερό και τον αέραΑς θέσουμε τον κύβο στη γη, γιατί είναι το πιο αδρανές από τα τέσσερα στερεά και το πιο συγκρατητικό στο σχήμα Το λιγότερο κινητό από τα εναπομείναντα σώματα (εικοσάεδρο) στο νερό Το περισσότερο ευκίνητο (τετράεδρο) στη φωτιά Και το ενδιάμεσο (οκτάεδρο) στον αέρα. Σίγουρο είναι πως οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν το τετράεδρο, το οποίο αντιστοιχούσαν στο 4ο στοιχείο, δηλαδή τον αριθμό 4, του μυστικιστικού τους συμβόλου, τετρακτύς, που όπως είπαμε συμβόλιζε τη μαγική δεκάδα. Ίσως ο Πλάτωνας να επηρεάστηκε από αυτούς σχετικά. Παρόλα αυτά έχουν βρεθεί στη Σκοτία και χρονολογούνται περί το 2000 π.Χ. εκατοντάδες μικρές σφαιρικά λαξευμένες πέτρες, με διάμετρο το πολύ 10 εκατοστά. Μερικές από αυτές, όπως φαίνεται στη φωτογραφία, φέρουν τεχνητές αυλακώσεις που αντιστοιχούν σε ακμές πολύεδρων. Ειδικότερα, η μεσαία πέτρα έχει ξεκάθαρα το σχήμα κανονικού δωδεκάεδρου με πενταγωνικές έδρες.

Η χρήση των σφαιρών αυτών δεν έχει αποσαφηνισθεί, αν και πολλοί κλίνουν προς τη μυστικιστική, λόγω των διάφορων σχετικών διακοσμήσεων που έχουν οι περισσότερες [Mi-2]. Πάντως, το κανονικό δωδεκάεδρο εμφανίζεται εδώ πολύ νωρίτερα πριν το αναφέρουν οι αρχαίοι Έλληνες. Τέλος, σώζονται μπρούτζινα κανονικά πολύεδρα της Ρωμαϊκής Εποχής. Σε αυτά (φωτογραφία) υπάρχουν σφαιροειδή σε κάθε κορυφή και κυκλικές τρύπες διαφόρων διαμέτρων σε κάθε έδρα.

Η χρήση των πολύεδρων αυτών δεν έχει ακόμη ξεκαθαριστεί ούτε η ακριβής χρονολογία που κατασκευάσθηκαν. Η παραπάνω φωτογραφία (ελαφρά χρωματισμένη) είναι παρμένη από άρθρο του Malkevitch [Bi-2]. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι τα πολύεδρα, ιδιαίτερα αυτά που ονομάζονται πλατωνικά, ενδιέφεραν τον άνθρωπο χιλιάδες χρόνια πριν. Αυτό το ενδιαφέρον ίσως συνοδευόταν από μια αποκρυφιστική φιλολογία γύρω από αυτά. Ο Πλάτων είναι ο πρώτος που τα χρησιμοποιεί, και τα πέντε, με συγκεκριμένο τρόπο κατασκευής προκειμένου να "οικοδομήσει" πάνω τους τη κοσμολογία του. Στην φωτογραφία, φαίνεται το σχέδιο ενός κανονικού δωδεκάεδρου, του Leonardo Da Vinci, από το βιβλίο του Paccioli για την Θεία Αναλογία.



Εκτός από τα Πλατωνικά Σώματα, θα δούμε πως υπάρχουν και δεκατρία στερεά που λέγονται Αρχιμήδεια. Αυτά είναι ημικανονικά, είναι όλα εγγράψιμα σε σφαίρα και οι έδρες τους είναι δυο ή τριών ειδών κανονικά πολύγωνα. Στον πίνακα του de' Barbari, το δεύτερο και μεγαλύτερο στερεό που αναφέραμε είναι ένα από τα Αρχιμήδεια πολύεδρα και ονομάζεται ρομβο-κυβοκτάεδρο. Τα Αρχιμήδεια στερεά απασχόλησαν όπως θα δούμε στο 4ο κεφάλαιο εξίσου με τα Πλατωνικά στερεά πολλούς μαθηματικούς αλλά και καλλιτέχνες-γεωμέτρες της Αναγέννησης. Στην διπλανή φωτογραφία, φαίνεται ακόμη ένα σχέδιο του Leonardo από την "Divina Proportione", αυτή τη φορά για ένα από τα δεκατρία Αρχιμήδεια στερεά, το εικοσιδωδεκάεδρο, του οποίου είναι η πρώτη τυπωμένη παρουσίαση.



Η σημασία των πολύεδρων γενικά είναι πολύ μεγάλη τόσο για τις ιδιότητες τους όσο και για τη χρήση τους παλαιότερα αλλά και σήμερα στην αρχιτεκτονική, στην κρυσταλλογραφία κ.α. Με ότι αναφέραμε σε αυτό το κεφάλαιο, προσπαθήσαμε να εισάγουμε την συμμετρία σαν θέμα προς περαιτέρω διερεύνηση. Ούτε εισήλθαμε σε πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, ούτε δείξαμε την ουσιαστική της συμβολή στην τέχνη και την αισθητική ούτε πόσο συνδέονται τα πολύεδρα και δη τα πλατωνικά με τη συμμετρία και τι σχέση μπορεί να έχουν αυτά με τους κρυστάλλους και την επιστήμη της αναγνώρισης τους, τις Πυραμίδες, τον Kepler και τους νόμους για την κίνηση των πλανητών ή πως η συμμετρία αποδεικνύεται πως ισχύει σαν αρχή σε πολύ γενικότερη βάση. Δεν δείξαμε τίποτε από αυτά, αλλά θέσαμε τις βάσεις, "σπείραμε" τα θέματα για τα οποία θα μιλήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.